Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12–14. Oktober 2009

a) Zeigen Sie, daß in jedem metrischen Raum die folgende *Vierecksungleichung* gilt: Für vier Elemente $x, y, z, w \in X$ ist stets: $|d(x,y) - d(z,w)| \le d(x,z) + d(y,w)$

b) Was besagt diese Ungleichung für die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$?

c) Die Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei ausgehend von $(x_0, y_0) = (0, 1)$ rekursiv definiert durch

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_{n-1} - y_{n-1}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Berechnen Sie die ersten Folgenglieder, stellen Sie eine Vermutung über Konvergenz oder Nichtkonvergenz der Folge auf und beweisen Sie diese!

d) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Zeigen Sie: Falls die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent sind und denselben Grenzwert x haben, so ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x !

e) Gilt auch die folgende Verallgemeinerung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \le y_n \le z_n$. Außerdem seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergent. Dann ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} z_n\,.$$

f) Entscheiden Sie für jede der hier definierten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und so weiter, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist! Was können Sie im konvergenten Fall über den Grenzwert sagen?

$$x_n = \sqrt{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2}, \quad u_n = 1 + (-1)^n, \quad v_n = (-1)^n(2n+1)$$

g) Welche der hier definierten komplexen Zahlenfolgen ist konvergent, und wohin konvergiert sie gegebenenfalls?

$$x_n = \frac{1-i}{n} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \qquad y_n = 1 + i^n, \qquad z_n = \left(\frac{3-i}{2+i}\right)^n$$

h) Welche der Folgen aus den beiden vorigen Aufgaben sind beschränkt? Welche der reellen Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend?

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeigen Sie, daß dann die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert!

j) Zeigen Sie: Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$! Ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n\ ?$$