WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, ZIMMER C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5–7. Oktober 2009

*a)* $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und $A, B$ seien zwei Mengen mit jeweils $n$ Elementen. Zeigen Sie: Jede injektive Abbildung $f: A \to B$ ist bijektiv!

**Lösung:** Wir müssen zeigen, daß $f$ auch surjektiv ist, daß es also zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Menge

$$C = \{b \in M \mid \text{Es gibt ein } a \in A \text{ mit } f(a) = b\} = \{f(a) \mid a \in A\}$$

bereits ganz $B$ ist. Sie ist offensichtlich eine Teilmenge von $B$; wir müssen zeigen, daß sie gleich $B$ ist.

Wegen der Injektivität von $f$ sind die Elemente $f(a)$ allesamt verschieden, die Menge $C$ hat also $n$ Elemente. Da sie Teilmenge der $n$-elementigen Menge $B$ ist, muß sie daher gleich $B$ sein, und wir sind fertig.

*Alternativ* läßt sich die Behauptung auch durch Widerspruch beweisen: Angenommen, die Abbildung wäre nicht bijektiv. Da sie als injektiv vorausgesetzt ist, kann das nur bedeuten, daß sie nicht surjektiv ist; es gibt also mindestens ein Element $b \in B$, das kein Urbild hat. Damit können wir aus $f$ auch eine Abbildung $A \to B \setminus \{b\}$ von der $n$-elementigen Menge $A$ nach der $(n-1)$-elementigen Menge $B \setminus \{b\}$ machen. An der Injektivität von $f$ ändert sich natürlich nichts, wenn wir aus $B$ ein Element herausnehmen.

Nun ist es aber unmöglich, eine Menge $A$ von $n$ Elementen injektiv abzubilden auf eine Menge von $n-1$ Elementen, denn da alle Elemente von $A$ verschiedene Bilder haben, sind allein das schon $n$ Elemente. Daher kann die Annahme, $f$ sei nicht bijektiv, nicht richtig sein.

(Diese Art von Schluß bezeichnet man als das DIRICHLETsche *Schubfachprinzip:* Verteilt man $n$ Gegenstände auf $n-1$ Schubfächer, so muß mindestens eines davon mehr als einen der Gegenstände enthalten.)

*b)* $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und $A, B$ seien zwei Mengen mit jeweils $n$ Elementen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß es $n!$ bijektive Abbildungen $f: A \to B$ gibt! Dabei steht $n!$ (gesprochen $n$ Fakultät) für das Produkt der ersten $n$ natürlichen Zahlen.

**Lösung:** Der *Induktionsanfang* $n = 1$ ist klar: Da das Produkt der ersten eins natürlichen Zahlen einfach gleich eins ist, müssen wir zeigen, daß es für zwei einelementige Mengen $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ genau eine bijektive Abbildung $f: A \to B$ gibt. Offensichtlich gibt es überhaupt nur eine Abbildung $f: A \to B$, denn für $f(a)$ gibt es nur die eine Möglichkeit $f(a) = b$, und damit ist die Abbildung festgelegt. Sie ist surjektiv, da $a$ ein Urbild von $b$ ist, und auch injektiv, denn damit zwei verschiedene Elemente auf dasselbe Element abgebildet werden können, müßte es erst einmal zwei verschiedene Elemente geben.

Zum *Induktionsschluß* nehmen wir an, die Behauptung sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$ und betrachten zwei Mengen $A, B$ mit jeweils $n+1$ Elementen. Da sich unsere Induktionsvoraussetzung nur auf $n$-elementige Mengen bezieht, wählen wir ein Element $a \in A$ aus; dann ist $A^* = A \setminus \{a\}$ eine Menge mit $n$ Elementen. Eine Abbildung $f: A \to B$ bildet $a$ ab auf eines der $n+1$ Elemente von $B$. Wenn $f$ bijektiv sein soll, kann wegen der Injektivität keines des Elemente von $A^*$ auf $f(a)$ abgebildet werden, $f$ bildet also die $n$ Elemente von $A^*$ bijektiv ab auf die $n$ Elemente der Menge $B \setminus \{f(a)\}$. Dafür gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten. Diese $n!$ Möglichkeiten haben wir für jede der $n+1$ möglichen Wahlen von $f(a)$, also gibt es $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$ bijektive Abbildungen von $A$ nach $B$, wie gewünscht.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gibt es somit für jede natürliche Zahl $n$ genau $n!$ bijektive Abbildungen zwischen zwei $n$-elementigen Mengen $A, B$.

*c)* Geben Sie die Menge aller Teilmengen von $M = \{1, 2\}$ explizit an!

**Lösung:** Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge einer jeden Menge, als auch von $M$. Außerdem ist jede Menge Teilmenge von sich selbst, und schließlich haben wir auch noch die beiden einelementigen Teilmengen $\{1\}$ und $\{2\}$. Die gesuchte Menge ist somit $\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$.

*d)* Geben Sie die Menge aller Teilmengen von $M = \emptyset$ explizit an!

**Lösung:** Die leere Menge ist natürlich Teilmenge von sich selbst, ansonsten kann es aber nichts geben. Die Menge aller Teilmengen von $\emptyset$ ist daher die einelementige Menge $\{\emptyset\}$.

*e)* Zeigen Sie: Die Menge $U \subset \mathbb{N}$ aller ungerader natürlicher Zahlen ist gleichmächtig zur Menge $G \subset \mathbb{N}$ aller gerader natürlicher Zahlen!

**Lösung:** Für jede ungerade Zahl $u \in U$ ist $u + 1$ eine gerade Zahl aus $G$. Die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} U \to G \\ u \mapsto u + 1 \end{cases}$$

ist injektiv, denn aus $u+1 = v+1$ folgt $u = v$; sie ist auch surjektiv, denn für jede gerade Zahl $g \in G$ ist $g - 1$ ungerade und wegen $g \geq 2$ auch ein Element von $U$. Somit sind $U$ und $G$ gleichmächtig.

*f)* Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit drei Dezimalstellen in der Mantisse und Exponenten zwischen $-3$ und $3$ die beiden Zahlen

$$x = (0{,}765 + 0{,}431) - (0{,}654 + 0{,}32) \quad \text{und} \quad y = (0{,}765 - 0{,}654) + (0{,}431 - 0{,}32)\,!$$

Runden Sie dabei, falls sich eine Zahl nicht exakt darstellen läßt, jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl!

**Lösung:** Die vier Ausgangszahlen lassen sich allesamt exakt darstellen, sogar mit Exponent null. Weiter ist

$$0{,}765 + 0{,}431 = 1{,}196 \quad \text{und} \quad 0{,}654 + 0{,}32 = 0{,}974\,.$$

Das zweite Ergebnis ist in unserem System darstellbar, das erste muß auf $0{,}120 \cdot 10^1$ gerundet werden. Zur Berechnung von $x$ müssen wir also $0{,}974$ von $0,12 \cdot 10^1$ subtrahieren; das exakte Ergebnis ist 0,226, und das ist auch darstellbar. Somit ist $x = 0{,}226$.
Bei der Berechnung von $y$ sind beide Klammern exakt darstellbar und gleich 0,111, also ist $y = 0{,}222$.

*g)* Zeigen Sie: Die Vorschrift $d\big((u, v), (x, y)\big) = \max\big(2\,|x - u|\,, 3\,|y - v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$ !

**Lösung:** Wir müssen die drei Forderungen an eine Metrik überprüfen: Da $|x - u| = |u - x|$ und $|y - v| = |v - y|$ ist, folgt sofort die Symmetrie:

$$d\big((u, v), (x, y)\big) = \max\big(2\,|x - u|\,, 3\,|y - v|\big) = \max\big(2\,|u - x|\,, 3\,|v - y|\big) = d\big((x, y), (u, v)\big)\,.$$

Auch mit der positiven Definitheit gibt es keine Probleme, denn Beträge sind stets größer oder gleich null; ist $d\big((u, v), (x, y)\big) = \max\big(2\,|x - u|\,, 3\,|y - v|\big) = 0$, muß $2\,|x - u| = 3\,|y - v| = 0$ sein, also $x - u = y - v = 0$, die beiden Punkte sind damit gleich. Bleibt noch die Dreiecksungleichung: Wir haben also drei Punkte $(r, s)$, $(u, v)$ und $(x, y)$ und müssen zeigen, daß der Abstand $d\big((r, s), (x, y)\big) = \max\big(2\,|x - r|\,, 3\,|y - s|\big)$ höchstens gleich der Summe der beiden Abstände

$$d\big((r, s), (u, v)\big) = \max\big(2\,|u - r|\,, 3\,|v - s|\big) \text{ und } d\big((u, v), (x, y)\big) = \max\big(2\,|x - u|\,, 3\,|y - v|\big)$$

ist. Nach der Dreiecksungleichung für die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$, den Betrag also, ist

$$\begin{aligned} 2|x-r| &= 2|(x-u)+(u-r)| \le 2|x-u|+2|u-r| \\ &\le \max\bigl(2|u-r|, 3|v-s|\bigr) + \max\bigl(2|x-u|, 3|y-v|\bigr) \\ &= d\bigl((r,s),(u,v)\bigr) + d\bigl((u,v),(x,y)\bigr) \end{aligned}$$

und entsprechend ist auch $3|y-s| \le d\bigl((r,s),(u,v)\bigr) + d\bigl((u,v),(x,y)\bigr)$. Damit ist aber auch das Maximum der beiden Zahlen kleiner oder gleich der Summe der beiden Abstände rechts, d.h. $d\bigl((r,s),(x,y)\bigr) \le d\bigl((r,s),(u,v)\bigr) + d\bigl((u,v),(x,y)\bigr)$. Damit gilt auch die Dreiecksungleichung und wir haben alle drei Forderungen an eine Metrik nachgewiesen.

*h)* *Richtig oder falsch:* Die Vorschrift $d\bigl((u,v),(x,y)\bigr) = \max\bigl(|x-y|, |u-v|\bigr)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$ !

**Lösung:** Mit der Symmetrie gibt es offensichtlich keine Probleme, und natürlich sind auch alle Abstände größer oder gleich Null. Allerdings ist

$$d\bigl((u,v),(x,y)\bigr) = \max\bigl(|x-y|, |u-v|\bigr)$$

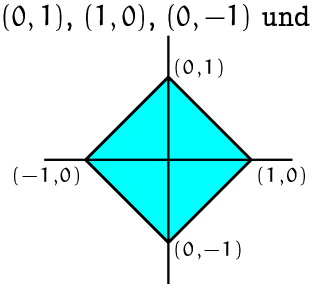
genau dann gleich Null, wenn $x = y$ und $u = v$ ist, wenn also beide Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden liegen. Das widerspricht der Definition einer Metrik, wonach der Abstand genau dann gleich Null sein muß, wenn die beiden Punkte gleich sind.

*i)* Wir betrachten die reelle Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ mit der Taxi-Metrik

$$d\bigl((u,v),(x,y)\bigr) = |x-u| + |y-v| \; .$$

Beschreiben Sie die Menge $\bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\bigl((x,y),(0,0)\bigr) \le 1\bigr\}$ geometrisch!

**Lösung:** Gesucht ist die Menge aller Punkte, die bezüglich der Taxi-Metrik höchstens Abstand eins vom Nullpunkt haben, für die also gilt $|x-0|+|y-0| \le 1$, d.h. $|x|+|y| \le 1$. Im ersten Quadranten $x \ge 0, y \ge 0$ ist dies einfach die Ungleichung $x+y \le 1$, die Punkte müssen also unter der Geraden $x+y = 1$ liegen; das ist die Gerade durch die Punkte $(0,1)$ und $(1,0)$. Im Quadranten $x \ge 0, y \le 0$ haben wir die Gleichung $x-y \le 1$ oder $y \ge x-1$; die Punkte müssen also oberhalb der Geraden $y = x-1$ liegen. Diese geht durch die Punkte $(1,0)$ und $(0,-1)$. Im Quadranten $x \le 0, y \le 0$ wird die Bedingung zu $-x-y \le 1$ oder $y \ge -1-x$; hier muß $(x,y)$ also oberhalb der Geraden $y = 1-x$ durch $(0,-1)$ und $(-1,0)$ liegen. Im verbliebenen Quadranten $x \le 0, y \ge 0$ schließlich muß $-x+y \le 1$ sein, also $y \le 1+x$; diese Gerade geht durch $(0,1)$ und $(-1,0)$. Unsere Menge ist also also gerade das Quadrat mit Ecken $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ und $(-1,0)$.




*j)* In $\mathbb{R}^2$ sei $d_{\max}$ die Maximums-Metrik und $d_E$ die EUKLIDische Metrik. Zeigen Sie: Für zwei Punkte $(x,y)$ und $(u,v)$ aus $\mathbb{R}^2$ und ein $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{R}$ gilt: Ist $d_{\max}\bigl((x,y),(u,v)\bigr) \le \varepsilon$, so ist $d_E\bigl((x,y),(u,v)\bigr) \le \sqrt{2}\varepsilon$.

**Lösung:** Ist $d_{\max}\bigl((x,y),(u,v)\bigr) = \max\bigl(|x-u|, |y-v|\bigr) \le \varepsilon$, muß sowohl $|x-u| < \varepsilon$ als auch $|y-v| < \varepsilon$ sein. Somit ist

$$d_E\bigl((x,y),(u,v)\bigr) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \le \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon \, .$$