Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5–7. Oktober 2009

a) $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und A, B seien zwei Mengen mit jeweils n Elementen. Zeigen Sie: Jede injektive Abbildung $f: A \to B$ ist bijektiv!

b) $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl und A, B seien zwei Mengen mit jeweils n Elementen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß es $n!$ bijektive Abbildungen $f: A \to B$ gibt! Dabei steht $n!$ (gesprochen n Fakultät) für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.

c) Geben Sie die Menge aller Teilmengen von $M = \{1, 2\}$ explizit an!

d) Geben Sie die Menge aller Teilmengen von $M = \emptyset$ explizit an!

e) Zeigen Sie: Die Menge $U \subset \mathbb{N}$ aller ungerader natürlicher Zahlen ist gleichmächtig zur Menge $G \subset \mathbb{N}$ aller gerader natürlicher Zahlen!

f) Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit drei Dezimalstellen in der Mantisse und Exponenten zwischen -3 und 3 die beiden Zahlen

$$x = (0{,}765 + 0{,}431) - (0{,}654 + 0{,}32) \quad \text{und} \quad y = (0{,}765 - 0{,}654) + (0{,}431 - 0{,}32)\,!$$

Runden Sie dabei, falls sich eine Zahl nicht exakt darstellen läßt, jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl!

g) Zeigen Sie: Die Vorschrift $d\big((u, v), (x, y)\big) = \max\big(2\,|x - u|\,, 3\,|y - v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$!

h) *Richtig oder falsch:* Die Vorschrift $d\big((u, v), (x, y)\big) = \max\big(|x - y|\,, |u - v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebenen $\mathbb{R}^2$!

i) Wir betrachten die reelle Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ mit der Taxi-Metrik

$$d\big((u, v), (x, y)\big) = |x - u| + |y - v|\ .$$

Beschreiben Sie die Menge $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\big((x, y), (0, 0)\big) \le 1\big\}$ geometrisch!

j) Zeigen Sie, daß in jedem metrischen Raum die folgende *Vierecksungleichung* gilt: Für vier Elemente $x, y, z, w \in X$ gilt stets: $|d(x, y) - d(z, w)| \le d(x, z) + d(y, w)$

k) Was besagt diese Ungleichung für die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$?

l) In $\mathbb{R}^2$ sei $d_{\max}$ die Maximums-Metrik und d_E die Euklidische Metrik. Zeigen Sie: Für zwei Punkte (x, y) und (u, v) aus $\mathbb{R}^2$ und ein $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{R}$ gilt: Ist $d_{\max}\big((x, y), (u, v)\big) \le \varepsilon$, so ist $d_E\big((x, y), (u, v)\big) \le \sqrt{2}\varepsilon$.