Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 28–30. September 2009

a) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_n + a_{n+1}$!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|b_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \ge n_0$.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es auf jeden Fall eine natürliche Zahl n_0, so daß $|a_n| < \varepsilon/2$ ist für alle $n \ge n_0$. Insbesondere ist also für $n \ge n_0$ auch $|a_{n+1}| \le \varepsilon/2$, denn natürlich ist auch $n+1 \ge n_0$. Somit ist für $n \ge n_0$ auch

$$|b_n| = |a_n + a_{n+1}| \le |a_n| + |a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 2a_n + 3a_{n+1}$!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|c_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \ge n_0$.

Ist $|a_n| < \varepsilon$ und $|a_{n+1}| < \varepsilon$, so ist

$$|c_n| = |2a_n + 3a_{n+1}| \le |2a_n| + |3a_{n+1}| = 2\,|a_n| + 3\,|a_{n+1}| \le 2\varepsilon + 3\varepsilon = 5\varepsilon\,.$$

Daher nutzen wir die Nullfolgeneigenschaft von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so aus, daß wir folgern: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n| < \varepsilon/5$ für alle $n \ge n_0$. Für diese n ist dann auch $|a_{n+1}| \le \varepsilon/5$, also ist

$$|c_n| = |2a_n + 3a_{n+1}| \le 2\,|a_n| + 3\,|a_{n+1}| < \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt, daß $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

c) Zeigen Sie: Ist $([a_n,\, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung über $\mathbb{R}$ mit $a_1 > 0$, so ist auch $\left(\left[\sqrt{a_n},\, \sqrt{b_n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

Lösung: Wir müssen zwei Dinge zeigen: Als erstes muß für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $\left[\sqrt{a_{n+1}},\, \sqrt{b_{n+1}}\right]$ im Intervall $\left[\sqrt{a_{n+1}},\, \sqrt{b_{n+1}}\right]$ liegen, d.h. die Ungleichung

$$\sqrt{a_n} \le \sqrt{a_{n+1}} \le \sqrt{b_{n+1}} \le \sqrt{b_n}$$

muß erfüllt sein. Da $([a_n,\, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, wissen wir jedenfalls, daß $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ ist; außerdem ist $a_1 > 0$, also erst recht $a_n > 0$. Daher reicht es zu zeigen, daß für zwei reelle Zahlen x, y mit $0 < x \le y$ auch $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$ ist. Wäre $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, so wäre auch

$$x = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} > \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} > \sqrt{y}\cdot\sqrt{y} = y\,,$$

im Widerspruch zur Annahme.

Als zweites müssen wir zeigen, daß die Folge der $\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}$ eine Nullfolge ist. Wir wissen, daß die Folge der $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, und nach der dritten binomischen Formel ist

$$b_n - a_n = \left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}\right)\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right),$$

also ist

$$\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} \le \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_n}} \le \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_1}}\,,$$

denn $\sqrt{a_1} \le \sqrt{a_n} \le \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$.

Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß $|b_n - a_n| < \sqrt{a_1}\,\varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$. Für diese n ist daher auch

$$\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \leq \frac{b_n - a_n}{\sqrt{a_1}} \leq \frac{\sqrt{a_1}\,\varepsilon}{\sqrt{a_1}} = \varepsilon\,,$$

die Folge $\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge.

d) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i(1-i), \quad z_2 = (3+i)(3-i), \quad z_3 = (i+1)(i-1),$$
$$z_4 = i^{2009}, \quad z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}, \quad z_6 = \frac{4+i}{2-i}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z_1 &= i(1-i) = i\cdot 1 - i\cdot i = i-(-1) = 1+i\\
z_2 &= (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9-(-1) = 10\\
z_3 &= (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -1-1 = -2\\
z_4 &= i^{2009} = i\cdot i^{2008} = i\cdot (i^2)^{1004} = i\cdot(-1)^{1004} = i\\
z_5 &= \frac{5+2i}{2+3i} = \frac{(5+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-2\cdot(-3)-15i+4i}{2^2+3^2} = \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i\\
z_6 &= \frac{4+i}{2-i} = \frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8-1+4i+2i}{2^2+1^2} = \frac{7}{5}+\frac{6}{5}i
\end{aligned}$$

e) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen z, w ist $\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$!

Lösung: Wir schreiben $z = x+iy$ und $w = u+iv$. Dann ist $zw = (ux-vy)+(vx+uy)i$, also $\overline{zw} = (ux-vy)-(vx+uy)i$. F'ur die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung erhalten wir $\overline{z}\cdot\overline{w} = (x-iy)(u-iv) = (ux-vy)-(vx+uy)i$, also dasselbe Ergebnis. Damit ist die Formel bewiesen.

f) Zeigen Sie: Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|zw| = |z|\,|w|$!

Lösung: Wir können den Betrag einer komplexen Zahl schreiben als Wurzel aus dem Produkt der Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl. Somit ist

$$|zw| = \sqrt{zw\cdot\overline{zw}} = \sqrt{z\cdot w\cdot\overline{z}\cdot\overline{w}} = \sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w}} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}\cdot\sqrt{w\cdot\overline{w}} = |z|\cdot|w|\ ,$$

wobei wir das Ergebnis der vorigen Aufgabe sowie das Kommutativgesetz der Multiplikation benutzt haben.

Alternativ läßt sich das auch direkt nachrechen: Da Beträge immer größer oder gleich Null sind, genügt es zu zeigen, daß die Quadrate der beiden Seiten gleich sind. Für $z = x+iy$ und $w = u+iv$ ist $zw = (xu-yv)+(xv+yu)i$, also

$$\begin{aligned}
&|zw|^2 = (xu-yv)^2 + (xv+yu)^2 = x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2\\
&= x^2u^2+y^2v^2+x^2v^2+y^2u^2 = x^2(y^2+v^2)+y^2(v^2+u^2) = (x^2+y^2)(u^2+v^2) = |z|^2\,|w|^2\ .
\end{aligned}$$

g) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -1$!

Lösung: Wir wissen, daß $z = -1$ eine Lösung ist, also können wir die abdividieren:

$$\begin{array}{l}
(z^3 + 1)\ :\ (z+1) = z^2 - z + 1\\
\underline{z^3 + z^2}\\
\quad -z^2 + 1\\
\quad \underline{-z^2 - z}\\
\qquad\quad z + 1
\end{array}$$

Somit ist $(z^3+1) = (z+1)(z^2-z+1)$, und wir müssen noch die Nullstellen des zweiten Faktors bestimmen. Das ist eine quadratische Gleichung, die sich in der üblichen Weise lösen läßt:

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

gilt genau dann, wenn

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\,.$$

Zusammen mit $z = -1$ sind das die sämtlichen Lösungen.

Alternative: Wir können auch genauso vorgehen wie in der Vorlesung bei der Lösung der Gleichung $z^3 = 1$: Wir machen den Ansatz $z = x + yi$; dann ist

$$z^3(x+yi)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot yi + 3x \cdot (yi)^2 + (yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

genau dann gleich eins, wenn

$$x^3 - 3xy^2 = -1 \quad \text{und} \quad 3x^2y - y^3 = y(3x^2 - y^2) = 0$$

ist. Die zweite Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $y = 0$ oder $y^2 = 3x^2$ ist.

$y = 0$ in die erste Gleichung eingesetzt führt auf $x^3 = -1$, also (da x eine reelle Zahl ist) $x = -1$. Die Wurzel $x + iy = 1$ ist in diesem Fall also einfach die wohlbekannte reelle Kubikwurzel.

Setzen wir $y^2 = 3x^3$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir die Gleichung $-8x^3 = -1$ mit der Lösung $x = \frac{1}{2}$. Wegen $y^2 = 3x^2$ gibt es für y somit die beiden Möglichkeiten $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, die dritten Wurzeln von -1 sind also

$$-1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

weitere Alternative: Wir hätten uns die ganze Rechnung sparen können, indem wir das Ergebnis aus der Vorlesung benutzen: Die Gleichung $z^3 = 1$ ist äquivalent zu $(-z)^3 = -1$. Sie hat die drei Lösungen

$$z = 1, \quad z = \rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad z = \bar{\rho} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

Daher hat die Gleichung $z^3 = -1$ die drei Lösungen

$$z = -1, \quad z = -\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i \quad \text{und} \quad z = -\bar{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

h) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^6 = 1$!

Lösung: Nach der dritten binomischen Formel ist $(z^6 - 1) = (z^3+1)(z^3-1)$. Für eine komplexe Zahl z mit $z^6 = 1$ ist also entweder $z^3 = 1$ oder $z^3 = -1$ (was natürlich auch so klar ist). Die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ kennen wir aus der Vorlesung, die von $z^3 = -1$ aus der vorigen Aufgabe. Somit haben wir die sechs Lösungen

$$\pm 1 \quad \text{und} \quad \pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,.$$

i) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = 3 + 4i$!

Lösung: Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$; laut Vorlesung ist dann im Falle $z^2 = a + ib$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} + a} \quad \text{und} \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2} - a}\,,$$

wobei die beiden Vorzeichen so gewählt werden müssen, daß xy dasselbe Vorzeichen wie b hat.

Hier ist $a = 3$ und $b = 4$, also müssen x und y dasselbe Vorzeichen haben. Weiter ist

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{3^2+4^2}+3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{25}+3} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{8} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \pm 2\,. \end{aligned}$$

Da $2xy = b = 4$ sein muß, also $xy = 2$, ist somit $y = \pm 1$. Die beiden Lösungen sind also $z = 2 + i$ und $z = -2 - i$.

j) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 25 = 0$!

Lösung: Durch quadratische Ergänzung wird die Gleichung zu $(x-3)^2 = -16$, die Lösungen sind also $x = 3 \pm 4i$.
(Wer die Lösungsformel für quadratische Gleichungen auswendig kennt, kann natürlich auch da einsetzen.)

k) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$!

Lösung: Quadratische Ergänzung führt auf die Gleichung

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}\,,$$

also ist

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\,.$$

l) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 3ix + 4 = 0$!

Lösung: Verwenden wir hier zur Abwechslung einmal die Lösungsformel: Mit $p = 3i$ und $q = 4$ ist

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{\frac{(3i)^2}{4} - 4} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{\frac{-9}{4} - 4} = -\frac{3i}{2} \pm \sqrt{-\frac{25}{4}} = -\frac{3i}{2} \pm \frac{5i}{2}\,.$$

Somit ist $x = i$ oder $x = -4i$.