Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21–23. September 2009

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Abschwächung der Bernoullischen Ungleichung:

$$(1+x)^n \ge 1+nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \ge -1\,.$$

Lösung: *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ müssen wir die Ungleichung $(1+x)^1 \ge 1 + 1 \cdot x$ beweisen; sie ist trivialerweise richtig, denn auf beiden Seiten steht einfach $1+x$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung sei für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir müssen zeigen, daß dann auch gilt $(1+x)^{n+1} \ge 1+(n+1)x$ für alle $x \ge -1$.

Wir schreiben $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$. Nach der Induktionsannahme ist der erste Faktor $(1+x)^n \ge (1+nx)$. Der zweite Faktor $1+x$ ist für $x > -1$ positiv; daher können wir in diesem Fall die Ungleichung damit multiplizieren und erhalten

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \ge (1+nx) \cdot (1+x)\,.$$

Diese Ungleichung gilt auch für $x = -1$, denn dann steht auf beiden Seiten die Null. Weiter ist

$$(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \ge 1+(n+1)x\,,$$

denn $x^2 \ge 0$ für alle x. Somit ist $(1+x)^{n+1} \ge 1+(n+1)x$ für alle $x \ge -1$.

Dieser Schluß funktioniert für alle $n \in \mathbb{N}$; nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist daher $(1+x)^n \ge 1+nx$ für alle $x \ge -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}\,!$$

Lösung: Wir können die Behauptung zum Beispiel durch vollständige Induktion beweisen: Als *Induktionsanfang* haben wir für $n = 1$ die Behauptung

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} & = & 1 - \dfrac{1}{2} \\ \| & & \| \\ \dfrac{1}{1 \cdot 2} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Zum *Induktionsschritt* nehmen wir an, die Behauptung sei für ein festes $n \in \mathbb{N}$ richtig und versuchen, sie auch für $n+1$ zu beweisen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{\text{IA}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}\,, \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen mit IA darunter bedeuten soll, daß wir hier die Induktionsannahme benutzt haben.

Somit haben wir aus der Richtigkeit der Behauptung für ein festes n auf die Richtigkeit auch für $n+1$ geschlossen, und damit ist die Behauptung bewiesen für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternativ ließe sich diese Behauptung auch direkt beweisen: Wir betrachten $i(i+1)$ als Hauptnenner eines Bruchs mit Nenner i und eines Bruchs mit Nenner $i+1$; nach kurzem Probieren kommt man auf die Formel

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\,.$$

Somit ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}\,,$$

da sich alle anderen Summanden gegenseitig wegheben.

c) Zeigen Sie: Für alle $n \neq 3$ gilt: $n^2 \leq 2^n$!

Lösung: Für $n = 3$ ist $3^2 > 2^3$, die Behauptung also definitiv falsch. Ein Induktionsbeweis kann daher höchstens ab $n = 4$ funktionieren; die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ müssen separat überprüft werden.

Für $n = 1$ haben wir die offensichtlich korrekte Behauptung $1^2 \leq 2^1$; mit $n = 2$ und der Behauptung $2^2 \leq 2^2$ gibt es auch keine Probleme.

Zum Beweis der Formel für $n \geq 4$ starten wir mit dem Induktionsanfang $n = 4$. Hier haben wir die Ungleichung $4^2 \leq 2^4$, bei der auf beiden Seiten 16 steht; die Behauptung ist also richtig.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, sie sei bewiesen für irgendein $n \geq 4$; wir müssen zeigen, daß sie auch für $n+1$ gilt. Nach Induktionsannahme ist

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1\,.$$

Wenn wir wüßten, daß $2n + 1 \leq 2^n$ ist, könnten wir rechts weiter abschätzen durch $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Leider sagt uns unsere Induktionsannahme aber nur etwas über die Größenverhältnisse zwischen n^2 und 2^n. Wir können aber n mit n^2 in Verbindung bringen: Für jede natürliche Zahl n ist $n \leq n^2$. Das reicht nicht; müssen also etwas schärfer abschätzen. Da $n \geq 4$ vorausgesetzt war, ist sogar $4n \leq n^2$, also $n \leq \frac{1}{4}n^2$. Somit ist, wenn wir noch einmal die Induktionsannahme ausnutzen,

$$(n+1)^2 \leq 2^n + \frac{n^2}{2} + 1 \leq 2^n + \frac{1}{2}\cdot 2^n + 1 = 2^n + 2^{n-1} + 1 \leq 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}\,.$$

Genau das wollten wir zeigen; also gilt die Behauptung auch für $n+1$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir sie daher für *alle* $n \geq 4$ bewiesen; da sie für $n = 1$ und $n = 2$ richtig ist, gilt sie für alle $n \neq 3$.

d) Zeigen Sie: Ist beim Algorithmus von Heron $x_n^2 = a$ für irgendein $n \geq 1$, so war bereits $x_0^2 = a$.

Lösung: Falls

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - a$$
$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2$$

verschwindet, muß auch der Inhalt der letzten Klammer verschwinden, d.h. $x_{n-1} = \dfrac{a}{x_{n-1}}$.

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit x_{n-1} folgt, daß bereits $x_{n-1}^2 = a$ ist.

Nun ist im Prinzip klar, wie es weitergeht: Falls $n-1 \geq 1$ ist, können wir nach dem gleichen Schema zeigen, daß auch $x_{n-2}^2 = a$ ist und so weiter, bis wir bei $x_0^2 = a$ angelangt sind.

Um daraus einen exakten Beweis zu machen, können wir beispielsweise folgendermaßen vorgehen: Wir definieren $m \in \mathbb{N}_0$ als die kleinste Zahl, für die $x_m^2 = a$ ist. Da $x_n^2 = a$ vorausgesetzt war, gibt es auf jeden Fall so eine Zahl; wir müssen zeigen, daß sie gleich Null ist.

Angenommen, $m > 0$. Dann können wir die obige Rechnung mit m an Stelle von n durchführen und erhalten die Gleichung $x_{m-1}^2 = a$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von m. Somit muß $m = 0$ sein.

e) Berechnen Sie nach dem Verfahren von HERON einen Näherungswert für $\sqrt{10}$, indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ zwei Iterationen durchführen! Wie genau kennen Sie nun den Wert von $\sqrt{10}$?

Lösung: Mit $x_0 = 3$ ist

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = \frac{19}{6} = 3{,}1\overline{6} \qquad \text{und}$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6} + \frac{10 \cdot 6}{19}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{19^2 + 10 \cdot 6^2}{6 \cdot 19} = \frac{721}{228} \approx 3{,}162280701754\,.$$

Wir wissen, daß $\sqrt{10}$ zwischen $10/x_2$ und x_2 liegen muß, d.h.

$$\frac{2280}{721} < \sqrt{10} < \frac{721}{228} \quad \text{oder} \quad 3{,}162274618585 < \sqrt{10} < 3{,}162280701755\,.$$

Wir kennen die Zahl also mit einem Fehler von weniger als 10^{-5}.

f) Richtig oder falsch: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig,* denn für alle n ist $0 < a_n < \frac{1}{n}$; wenn wir uns ein $\varepsilon > 0$ vorgeben, ist also $a_n < \varepsilon$ für alle $n > 1/\varepsilon$. Ist n_0 die kleinste natürliche Zahl größer $1/\varepsilon$, ist also $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(Das ist natürlich eine sehr grobe Abschätzung; da wir nur zeigen müssen, daß es zu jedem ε *irgendein* n_0 gibt, lohnt es sich nicht, mehr Aufwand zu betreiben.)

g) Richtig oder falsch: Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: Hier läßt sich direkt nichts sehen; wir müssen b_n zunächst geeignet umformen. Da sich nichts anderes anbietet, versuchen wir es mit der dritten binomischen Formel:

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,,$$

und das ist offensichtlich kleiner als eine vorgegebene Schranke $\varepsilon > 0$, wenn $n > 1/\varepsilon^2$. Ist n_0 die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $1/\varepsilon^2$, ist also $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

h) Richtig oder falsch: Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (n+1)^2 - n^2$ ist eine Nullfolge.

Lösung: Das ist offensichtlich falsch, denn $c_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ ist die Folge der ungeraden Zahlen. Deren Glieder mit wachsendem n immer größer; es kann sich also unmöglich um eine Nullfolge handeln.

i) Berechnen Sie die Intervalle $[1, 2] + [-2, -1]$, $[1, 2] - [-2, -1]$ und $[1, 2] \cdot [-2, -1]$!

Lösung: Bei der Addition von Intervallen können wir einfach die Schranken addieren; daher ist $[1, 2] + [-2, -1] = [-1, 1]$.

Die Subtraktion können wir auf eine Addition zurückführen, denn für alle $x \in [-2, -1]$ ist $-x \in [1, 2]$ und umgekehrt. Somit ist

$$[1, 2] - [-2, -1] = [1, 2] + [1, 2] = [2, 4] .$$

Für die Multiplikation schließlich müssen wie die vier Produkte aus Schranken verschiedener Intervalle betrachten:

$$1 \cdot (-2) = -2, \quad 1 \cdot (-1) = -1, \quad 2 \cdot (-2) = -4 \quad \text{und} \quad 2 \cdot (-1) = -2 .$$

Das kleinste dieser Produkte ist -4, das größte -1, also ist

$$[1, 2] \cdot [-2, -1] = [-4, -1] .$$

j) Geben Sie eine Intervallschachtelung an für die reelle Zahl $\sqrt{2} + \sqrt{3}$!

Lösung: Mit dem Algorithmus von HERON können wir uns leicht Intervallschachtelungen $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ zu $\sqrt{2}$ und $([c_n, d_n])_{n\in\mathbb{N}}$ zu $\sqrt{3}$ verschaffen. Konkret können wir nach HERON etwa von zwei Zahlen $b_0 = d_0 = 1$ ausgehen und für $n \geq 1$ definieren

$$b_n = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right), \quad a_n = \frac{2}{b_n}, \quad d_n = \frac{1}{2}\left(d_n + \frac{3}{d_n}\right), \quad c_n = \frac{3}{d_n} .$$

Dann ist $([a_n + c_n, b_n + d_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

k) Finden Sie eine Intervallschachtelung mit endlichen Dezimalbrüchen als Grenzen für die Zahl $\dfrac{1}{11}$!

Lösung: Die Dezimaldarstellung von $1/11$ ist periodisch und gleich $0,\overline{09}$. Eine Intervallschachtelung erhalten wir dadurch, daß wir für die untere Schranke einfach nach einer gewissen Anzahl von Ziffern abbrechen und für die obere eine Einheit der letzten Dezimalstelle addieren. Konkret könnten wir zum Beispiel die Intervalle

$$[0{,}09,\ 0{,}1], \quad [0{,}0909,\ 0{,}091], \quad [0{,}090909,\ 0{,}09091], \quad [0{,}09090909,\ 0{,}0909091], \quad \ldots$$

betrachten. Formal läßt sich dies definieren als die Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ mit

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{100^i} \quad \text{und} \quad b_n = a_n + \frac{1}{100^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{9}{100^i} + \frac{1}{10^{2n-1}} .$$

l) Wie können Sie eine Intervallschachtelung finden für die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$?

Lösung: Falls $p^2 - 4q$ negativ ist, gibt es keine Lösungen und wir können daher auch keine Intervallschachtelung dafür finden.
Falls $p^2 - 4q$ verschwindet, gibt es nur die eine Lösung $-p/2$; eine Intervallschachtelung dafür wäre etwa die Folge der Intervalle

$$\left[-\frac{p}{2} - 10^{-n},\ -\frac{p}{2} + 10^{-n}\right] \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} .$$

Falls $p^2 - 4q$ positiv ist, können wir uns zunächst nach HERON eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ für die Wurzel aus dieser Zahl verschaffen. Die Intervallschachtelung für die negative Wurzel ist dann $([-b_n, -a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ und für die beiden Lösungen haben wir entsprechend die Folge der Intervalle

$$\left[-\frac{p}{2} + \frac{a_n}{2},\ -\frac{p}{2} + \frac{b_n}{2}\right] \quad \textit{bzw.} \left[-\frac{p}{2} - \frac{b_n}{2},\ -\frac{p}{2} - \frac{a_n}{2}\right] .$$

m) Zeigen Sie: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$!

Lösung: Nach der ersten binomischen Formel ist $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = 5+2\sqrt{6}$. Da $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ positiv ist, folgt die Behauptung.

n) Richtig oder falsch: $\sqrt{2}-\sqrt{3} = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Lösung: Hier ist $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = 5-2\sqrt{6}$. Da $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ negativ ist, $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ aber positiv, ist die Gleichung trotzdem falsch; tatsächlich ist

$$\sqrt{2}-\sqrt{3} = -\sqrt{5-2\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \sqrt{3}-\sqrt{2} = \sqrt{5-2\sqrt{6}}\,.$$

o) Zeigen Sie: $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$!

Lösung: Mit den Formeln aus den letzten beiden Aufgaben folgt das natürlich sofort:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}\,.$$

Will man die Formel direkt beweisen, muß man zunächst die linke Seite quadrieren:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 &= 5+2\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}+5-2\sqrt{6}\\ &= 10+2\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = 10+2\sqrt{25-4\cdot 6} = 12\,.\end{aligned}$$

Da $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ positiv ist, folgt

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}\,.$$

p) Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$ und $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$!

Lösung: Im ersten Fall erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{2}-1$ und erhalten

$$\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-\sqrt{5}-1}{2-1} = \sqrt{10}+\sqrt{2}-\sqrt{5}-1\,.$$

Beim zweiten Ausdruck erweitern wir entsprechend mit $\sqrt{5}+\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{10}+2}{5-2} = \frac{7}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{10}\,.$$

q) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten binomischen Formel, daß für zwei positive Zahlen a, b das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ nicht größer als das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ sein kann und daß die beiden nur im Fall $a=b$ gleich sind!

Lösung: Die zweite binomische Formel für a und b bringt offensichtlich nichts; irgendwie müssen auch Wurzeln ins Spiel kommen. Probieren wir es mit

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\,.$$

Als Quadrat muß dies größer oder gleich Null sein, also ist

$$a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \quad \text{oder} \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}\,.$$

Dividieren wir diese Ungleichung noch durch zwei, haben wir die gewünschte Relation

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Falls hier ein Gleichheitszeichen steht, muß auch $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = 0$ sein, also $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ und damit $a=b$. Umgekehrt ist im Falle $a=b$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a = \frac{a+b}{2}\,,$$

das geometrische Mittel ist also gleich dem arithmetischen.