Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21–23. September 2009

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Abschwächung der Bernoullischen Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \geq -1\,.$$

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}\,!$$

c) Zeigen Sie: Für alle $n \neq 3$ gilt: $n^2 \leq 2^n$!

d) Zeigen Sie: Ist beim Algorithmus von Heron $x_n^2 = a$ für irgendein $n \geq 1$, so war bereits $x_0^2 = a$.

e) Berechnen Sie nach dem Verfahren von Heron einen Näherungswert für $\sqrt{10}$, indem Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ zwei Iterationen durchführen! Wie genau kennen Sie nun den Wert von $\sqrt{10}$?

f) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ ist eine Nullfolge.

g) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist eine Nullfolge.

h) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (n+1)^2 - n^2$ ist eine Nullfolge.

i) Berechnen Sie die Intervalle $[1, 2] + [-2, -1]$, $[1, 2] - [-2, -1]$ und $[1, 2] \cdot [-2, -1]$!

j) Geben Sie eine Intervallschachtelung an für die reelle Zahl $\sqrt{2} + \sqrt{3}$!

k) Finden Sie eine Intervallschachtelung mit endlichen Dezimalbrüchen als Grenzen für die Zahl $\dfrac{1}{11}$!

l) Wie können Sie eine Intervallschachtelung finden für die beiden Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$?

m) Zeigen Sie: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$!

n) *Richtig oder falsch:* $\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

o) Zeigen Sie: $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$!

p) Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$ und $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$!

q) Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten binomischen Formel, daß für zwei positive Zahlen a, b das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ nicht größer als das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ sein kann und daß die beiden nur im Fall $a = b$ gleich sind!