WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 14–16. September 2009

a) Bestimmen Sie für die Mengen

$$A = \{1, 2, 4, 7, 10, 14, 18, 23\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 3, 6, 10, 15, 23, 30\}$$

Durchschnitt, Vereinigung sowie die beiden Differenzen $A \setminus B$ und $B \setminus A$!

Lösung: Die Vereinigung $A \cup B$ besteht aus allen Elementen, die in einer der beiden Mengen vorkommen, also ist

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 14, 15, 18, 23, 30\}.$$

Der Durchschnitt $A \cap B$ enthält nur die Elemente, die in *beiden* Mengen liegen, also ist

$$A \cap B = \{1, 10, 23\}.$$

Die Differenz $A \setminus B$ enthält alle Elemente, die in A, nicht aber in B liegen; somit ist

$$A \setminus B = \{2, 4, 7, 14, 18\} \quad \text{und entsprechend} \quad B \setminus A = \{3, 6, 15, 30\}.$$

b) *Richtig oder falsch:* Für zwei Mengen A, B gilt $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist für die Mengen aus dem vorigen Beispiel

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 3, 4, 6, 7, 14, 15, 18, 30\}$$

verschieden von $A \cup B$: Die Elemente $1, 10, 23$ fehlen. (Eine richtige Formel wäre

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) ,$$

aber danach war nicht gefragt.)

c) *Richtig oder falsch:* Für zwei Mengen A, B gilt $A \cup (A \cap B) = A$.

Lösung: *Richtig,* denn jedes Element von $A \cap B$ liegt insbesondere in A, so daß bei der Bildung der Vereinigung keine neuen Elemente dazukommen.

d) *Richtig oder falsch:* Für vier Mengen A, B, C, D gilt stets

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D) .$$

Lösung: *Richtig:* $A \cap B$ besteht aus allen Elementen, die sowohl in A als auch in B liegen, $C \cap D$ aus denen, die sowohl in C als auch in D liegen. $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ enthält entsprechend alle Elemente, die sowohl in $A \cap B$ als auch in $C \cap D$ liegen, also genau die, die jeder der vier Mengen A, B, C, D liegen. Dieselbe Art von Argument zeigt, daß acuh $(A \cap C) \cap (B \cap D)$ genau diese Elemente enthält; also sind die beiden Mengen gleich.

e) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller Zehnerzahlen aus $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge der Menge aller geraden natürlicher Zahlen.

Lösung: *Richtig,* denn jede Zehnerzahl ist gerade.

f) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen ist eine Teilmenge der Menge alle vierter Potenzen natürlicher Zahlen.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist vier zwar eine Quadratzahl, läßt sich aber nicht als vierte Potenz einer natürlichen Zahl schreiben.

g) G sei die Menge aller geraden ganzen Zahlen, D die Menge aller durch drei teilbarer ganzen Zahlen. Was ist $G \cap D$?

Lösung: Im Durchschnitt $G \cap D$ liegen alle ganzen Zahlen, die sowohl gerade als auch durch drei teilbar sind, die also sowohl durch zwei als auch durch drei teilbar sind. Somit ist

$$G \cap D = \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist durch sechs teilbar} \right\}$$

die Menge aller Sechserzahlen.

h) Welche Elemente hat die Menge

$$A = \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 20 \text{ und } z \text{ ist Quadratzahl} \right\} ?$$

Lösung: Die einzigen Quadratzahlen kleiner oder gleich zwanzig sind $0, 1, 4, 9$ und 16, also ist $A = \{0, 1, 4, 9, 16\}$.

i) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller rationaler Zahlen mit ungeradem Nenner ist (mit der üblichen Addition und Multiplikation) ein Körper.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise gibt es für $a = \frac{2}{3}$ keinen Bruch a'' mit ungeradem Nenner, für den $aa'' = 1$ ist, denn alle Darstellungen von $\frac{3}{2}$ haben geraden Nenner. (Die Existenz vin multiplikativen Inversen ist übrigens das einzige Körperaxiom, das nicht erfüllt ist; man überlegt sich leicht, daß es mit den anderen keine Probleme gibt.)

j) Zeigen Sie, daß für je vier Elemente a, b, c, d eines Körpers gilt $(ab)(cd) = (ac)(bd)$!

Lösung: Wir formen die linke Seite um nach dem Assoziativ- und dem Kommutativitätsgesetz der Multiplikation; der Kürze halber soll dabei „$\underset{AG}{=}$“ bedeuten, daß die rechte Seite durch Anwendung des Assoziativgesetzes aus der linken hervorgeht, „$\underset{AG}{=}$“ entsprechend, daß das Kommutativitätsgesetz angewendet wurde. Teilprodukte, die für die Anwendung des Assoziativgesetzes als ein einziges Körperelement betrachtet werden, sind auf der linken Seite des Gleichheitszeichens unterstrichen:

$$\underline{(ab)}(cd) \underset{AG}{=} \big((ab)c\big)d \underset{AG}{=} \big(a(bc)\big)d \underset{KG}{=} \big(a(cb)\big)d \underset{AG}{=} \big(\underline{(ac)}b\big)d \underset{AG}{=} (ac)(bd)$$

k) Beweisen Sie, daß für je zwei Elemente x, y eines Körpers gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy\ !$$

Lösung: Nach der ersten binomischen Formel ist

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{x^2+2xy+y^2}{4}\ ;$$

nach der zweiten entprechend

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{x^2-2xy+y^2}{4}\ .$$

Subtrahiert man die beiden Formeln voneinander, führt dies auf die Differenz

$$\frac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{4} = \frac{4xy}{4} = xy\ .$$

l) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl x gibt mit $x^3 = 5$!

Lösung: $x = p/q$ sei die gekürzte Darstellung einer rationalen Zahl mit $x^3 = 5$. Dann ist also $p^3/q^3 = 5$, d.h. $p^3 = 5q^3$. Somit ist p^3 durch fünf teilbar, also auch p. Wir können daher eine natürliche Zahl r finden mit $p = 5r$ und $p^3 = 5^3r^3$. Also ist $5^3r^3 = 5q^3$ und damit $q^3 = 5^2r^2$ durch 25. Das ist nur möglich, wenn q mindestens durch fünf teilbar ist, im Widerspruch zur Annahme, daß p/q ein gekürzter Bruch war. Also gibt es keine rationale Zahl x mit $x^3 = 5$.

m) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten n Quadratzahlen gleich $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ist!

Lösung: *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist die Summe der ersten n Quadratzahlen $1^2 = 1$ und

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1\,,$$

die Behauptung ist also richtig.

Induktionsschritt: Angenommen, wir wissen daß für eine gewisse natürliche Zahl n gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)\big(2n^2 + n + 6n + 6\big)}{6} = \frac{(n+1)\big(2n^2 + 7n + 6\big)}{6}\,.\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß dies mit

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

übereinstimmt, was offensichtlich der Fall ist.

(Wir hätten die Zähler natürlich auch vollständig ausmultiplizieren können; wer das tut wird aber schnell feststellen, daß die Rechnung durch das Ausklammern des gemeinsamen Faktors $(n+1)$ deutlich einfacher wurde.)