

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 14–16. September 2009

a) Bestimmen Sie für die Mengen

$$A = \{1, 2, 4, 7, 10, 14, 18, 23\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 3, 6, 10, 15, 23, 30\}$$

Durchschnitt, Vereinigung sowie die beiden Differenzen  $A \setminus B$  und  $B \setminus A$ !

b) *Richtig oder falsch*: Für zwei Mengen  $A, B$  gilt  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ .

c) *Richtig oder falsch*: Für zwei Mengen  $A, B$  gilt  $A \cup (A \cap B) = A$ .

d) *Richtig oder falsch*: Für vier Mengen  $A, B, C, D$  gilt stets

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D).$$

e) *Richtig oder falsch*: Die Menge aller Zehnerzahlen aus  $\mathbb{N}$  ist eine Teilmenge der Menge aller geraden natürlicher Zahlen.

f) *Richtig oder falsch*: Die Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen ist eine Teilmenge der Menge aller vierter Potenzen natürlicher Zahlen.

g)  $G$  sei die Menge aller geraden ganzen Zahlen,  $D$  die Menge aller durch drei teilbarer ganzen Zahlen. Was ist  $G \cap D$ ?

h) Welche Elemente hat die Menge

$$A = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 20 \text{ und } z \text{ ist Quadratzahl}\}?$$

i) *Richtig oder falsch*: Die Menge aller rationaler Zahlen mit ungeradem Nenner ist (mit der üblichen Addition und Multiplikation) ein Körper?

j) Zeigen Sie, daß für je vier Elemente  $a, b, c, d$  eines Körpers gilt  $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ !

k) Beweisen Sie, daß für je zwei Elemente  $x, y$  eines Körpers gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy!$$

l) Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl  $x$  gibt mit  $x^3 = 5$ !

m) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen gleich  $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  ist!