Lösung von Aufgabe 8 des achten Übungsblatts

Wir gehen aus von zwei reellen Zahlen $x_0 < x_1$ und setzen

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad \text{für } n \geq 2\,.$$

Sei $a = x_1 - x_0$. Da x_n jeweils die Mitte des Intervalls zwischen x_{n-1} und x_{n-2} ist, halbiert sich der Betrag von $x_n - x_{n-1}$ jeweils, wenn wir n um eins erhöhen; genauer ist

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} - x_{n-1} = \frac{-x_{n-1} + x_{n-2}}{2} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2})\,.$$

Induktiv folgt die Gleichung

$$x_n - x_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}a}{2^{n-1}} \quad \text{oder} \quad x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}a}{2^{n-1}}\,.$$

Somit ist

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}a}{2^{n-1}} = x_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k a}{2^k} = x_0 + a \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k\,.$$

Nach der Summenformel für geometrische Reihen ist somit

$$x_n = x_0 + a \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = x_0 + \frac{2a}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\,.$$

Dies konvergiert für $n \to \infty$ gegen

$$x_0 + \frac{2a}{3} = x_0 + \frac{2(x_1 - x_0)}{3} = \frac{x_0}{3} + \frac{2x_1}{3}\,,$$

also den Punkt im Intervall $[x_0, x_1]$, dessen Entfernung von x_0 doppelt so groß ist wie die von x_1.