Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*4. Dezember 2009*

# 13. Übungsblatt Analysis I

**Fragen:** *(je ein Punkt)*

*1)* Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = 2^i$ !

**Lösung:** $2^i = e^{\log(2)i} = \cos\log 2 + i\sin\log 2$, also ist

$$\operatorname{Re} 2^i = \cos\log 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} 2^i = \sin\log 2\,.$$

*2)* *Richtig oder falsch:* Falls die stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ keine negativen Werte annimmt, ist $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

**Lösung:** *Richtig,* denn ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist nach der Monotonieregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b 0\,dx = 0\,.$$

*3)* *Richtig oder falsch:* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-1} = -\frac{3}{2}$.

**Lösung:** Das ist offensichtlich falsch: Da $1/x^2$ nie negativ wird, kann das Integral nach Frage 2 unmöglich einen negativen Wert haben. (Da weder die Funktion $1/x^2$ noch ihre Stammfunktion $F(x) = -1/x$ für $x = 0$ definiert sind, haben wir keine Stammfunktion für das gesamte Integrationsintervall $[-1, 2]$; die Formel $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ ist daher nicht anwendbar.)

*4)* Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x) = x^3 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$ !

**Lösung:** Die Ableitung von $x^{n+1}$ ist $(n+1)x^n$; für $n \neq -1$ ist also die Stammfunktion von $x^n$ gleich $x^{n+1}/(n+1)$. Für $n = -1$ wissen wir, daß die Ableitung von $\log x$ gleich $1/x$ ist. Somit ist

$$\int \left(x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \log x - \frac{1}{2x^2} + C\,.$$

**Aufgabe 6:** *(5 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = 2x - 1$ explizit die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}\,!$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2i}{n} - 1\right) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= \frac{2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} - \frac{n}{n} = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n} = -\frac{1}{n}\end{aligned}$$

geht für $n \to \infty$ gegen Null, und

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}-1\right) = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{n} = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$$

auch.

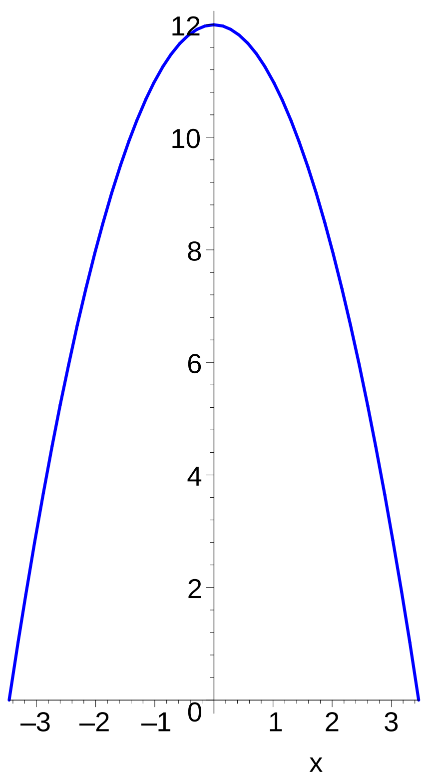
*Zusatz (gehört nicht zur gefragten Lösung):* Beides sind RIEMANNsche Summen für

$$\int_0^1 (2x-1)\,dx = \left. x^2 - x \right|_0^1 = 0 - 0 = 0\,,$$

so daß das Ergebnis keine Überraschung sein sollte.

*b)* Eine Schablone zum Zeichnen der Parabel $y = x^2$ habe eine Länge ( = maximaler $y$-Wert) von 12 cm. Welche Fläche hat sie?

**Lösung:** Legen wir die Schablone so aufs Koordinatensystem, daß die Mittelachse auf der $y$-Achse liegt. die Oberkante auf der $x$-Achse und der Scheitelpunkt bei $(0, 12)$, liegt die Kante auf der Parabel $y = 12 - x^2$. Sie schneidet die $x$-Achse in den Punkten $(\pm\sqrt{12}, 0)$.




Die Fläche der Schablone ist die Fläche zwischen $x$-Achse und der Kurve, also

$$\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} (12 - x^2)\,dx = \left. 12x - \frac{x^3}{3} \right|_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}$$
$$= 24\sqrt{12} - \frac{2 \cdot 12 \cdot \sqrt{12}}{3} = 16\sqrt{12} = 32\sqrt{3} \approx 55{,}4256258422\,.$$

Die Schablone hat also eine Fläche von knapp $55\frac{1}{2}$ cm$^2$.

**Aufgabe 7:** *(6 Punkte)*

*a)* Berechnen Sie anhand einer Approximation durch vier Rechtecke eine obere und eine untere Schranke für die Fläche unter der Kurve $y = 1/\sqrt{9-x^3}$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$! *(Taschenrechnergenauigkeit)*

**Lösung:** Die Funktion $9 - x^3$ ist zwischen $x = 0$ und $x = 2$ monoton fallend und positiv, also ist auch ihre Quadratwurzel monoton fallend und deren Kehrwert $f(x) = 1/\sqrt{9-x^3}$ ist monoton wachsend. Wenn wir mit vier gleich breiten Rechtecken arbeiten, kommen wir auf die Unterteilung $0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < 2$; die Funktionswerte an den Unterteilungspunkten sind

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ |
| $f(x)$ | $0{,}\overline{3}$ | $0{,}3356725433$ | $0{,}3535533906$ | $0{,}4216370214$ | $1$ |

Als untere Grenze haben wir somit

$$\frac{f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2})}{2} \approx 0{,}7220981443$$

und als Obergrenze

$$\frac{f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2)}{2} \approx 1{,}0554314776\,.$$

**NB:** Die Funktion $f(x)$ hat keine elementar ausdrückbare Stammfunktion; numerische Berechnung führt zum Ergebnis

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \approx 0{,}8141064766\,.$$

*b)* Beweisen Sie die Keplersche Faßregel: Für $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ist die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der $x$-Achse zwischen den Koordinatenwerten $x = a$ und $x = b$ gleich $\frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ mit $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(\frac{a+b}{2})$ und $y_2 = f(b)$.

**Lösung:** Offensichtlich sind beide Seiten der behaupteten Gleichung linear in $f$, d.h., wenn die Formel für zwei Funktionen $f$ und $g$ gilt, gilt sie auch für jede Linearkombination $cf + dg$. Daher genügt es, die Formel für die Funktionen $x^3, x^2, x$ und die konstante Funktion eins zu beweisen. (Das spart zwar keine Rechnung, macht den Beweis aber übersichtlicher und damit auch weniger fehleranfällig.) Hier gilt

$$\int_a^b 1\,dx = b - a = \frac{b-a}{6}(1+4+1)$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b-a}{6}(3a+3b) = \frac{b-a}{6}\left(a + 4\cdot\frac{a+b}{2} + b\right)$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3} = \frac{b-a}{6}\left(a^2 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + b^2\right)$$

$$\int_a^b x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_a^b = \frac{b^4-a^4}{4} = \frac{(b-a)(b^3+b^2a+ab^2+a^3)}{4} \quad \text{und}$$

$$\frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right) = \frac{(b-a)(2a^3+a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+2b^3)}{6\cdot 2}$$
$$= \frac{(b-a)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}{2\cdot 2} = \frac{b^4-a^4}{4}\,.$$

*c)* Gelegentlich wird diese Regel auch für beliebige Funktionen zur näherungsweisen Berechnung des Integrals eingesetzt. Schätzen Sie nach dieser Formel die in *a)* betrachtete Fläche!

**Lösung:** Hier ist $\frac{1}{2}(a+b)=1$, also
$$y_0 = f(0) = \frac{1}{3}, \quad y_1 = 4f(1) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad y_2 = f(2) = 1\,.$$
Damit erhalten wir den Näherungswert
$$\frac{2}{6}\left(\frac{1}{3} + \sqrt{2} + 1\right) \approx 0{,}91584896524\,.$$

**Aufgabe 8:** *(5 Punkte)*
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\int x^n e^x \, dx = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k\right) e^x\,!$$

**Lösung:** Für $n = 1$ ist nach der Regel zu partiellen Integration
$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x = \left((-1)^1 \frac{1!}{0!} + (-1)^0 \frac{1!}{1!} x\right) e^x\,.$$
Wenn wir annehmen, daß die Behauptung für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, folgt wieder nach der Regel zur partiellen Integration und dieser Induktionsannahme, daß gilt
$$\int x^{n+1} e^x \, dx = x^{n+1}e^x - \int (n+1)x^n e^x \, dx = x^{n+1}e^x - (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k\right) e^x$$
$$= x^{n+1}e^x + \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k!} x^k\right) e^x = \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \frac{(n+1)!}{k!} x^k\right) e^x\,,$$
und genau das ist die Behauptung für $n+1$. Somit gilt diese für alle $n \in \mathbb{N}$.