Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

4. Dezember 2009

13. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = 2^i$!

2) *Richtig oder falsch:* Falls die stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ keine negativen Werte annimmt, ist $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

3) *Richtig oder falsch:* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-1} = -\frac{3}{2}$.

4) Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x) = x^3 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$!

Aufgabe 6: (*5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = 2x - 1$ explizit die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}\ !$$

b) Eine Schablone zum Zeichnen der Parabel $y = x^2$ habe eine Länge (= maximaler y-Wert) von 12 cm. Welche Fläche hat sie?

Aufgabe 7: (*6 Punkte)*

a) Berechnen Sie anhand einer Approximation durch vier Rechtecke eine obere und eine untere Schranke für die Fläche unter der Kurve $y = 1/\sqrt{9 - x^3}$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$! *(Taschenrechnergenauigkeit)*

b) Beweisen Sie die Keplersche Faßregel: Für $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ ist die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse zwischen den Koordinatenwerten $x = a$ und $x = b$ gleich

$$\frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{mit} \quad y_0 = f(a),\ \ y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ \text{ und } \ y_2 = f(b)\,.$$

c) Gelegentlich wird diese Regel auch für beliebige Funktionen zur näherungsweisen Berechnung des Integrals eingesetzt. Schätzen Sie nach dieser Formel die in *a)* betrachtete Fläche!

Aufgabe 8: (*5 Punkte)*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int x^n e^x\,dx = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k\right) e^x\ !$$

Keine Abgabe – Besprechung in der Großen Übung am 11. Dezember