

27. November 2009

## 12. Übungsblatt Analysis I

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Zeigen Sie: Die Menge  $M$  aller reeller Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ , die der Rekursionsvorschrift  $a_k = \alpha a_{k-1} + \beta a_{k-2}$  genügen für zwei vorgegebene Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum!
- 2) *Richtig oder falsch:* Ist  $f'''(x) = -f'(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so ist  $f(x)$  darstellbar in der Form  $a \sin x + b \cos x$ .
- 3) Zeigen Sie:  $f(x) = e^{-2x} \cos 3x$  erfüllt eine Beziehung der Form  $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ !
- 4) *Richtig oder falsch:*  $\cosh ix = \cos x$  und  $\cos ix = \cosh x$
- 5) Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $\sinh ix$  und  $\sin x$ ?

**Aufgabe 6:** (5 Punkte)

Die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für  $a_k$ !

**Aufgabe 7:** (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion!
- b) Bestimmen Sie die größte Teilmenge  $D_1 \subseteq \mathbb{C}$ , auf der  $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$  erklärt werden kann, und die größte Teilmenge  $D_2 \subseteq \mathbb{C}$ , auf der  $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$  erklärt werden kann!
- c) Bestimmen Sie die Ableitungen von  $\tan x$  auf  $D_1 \cap \mathbb{R}$  und  $\cot x$  auf  $D_2 \cap \mathbb{R}$ !

**Aufgabe 8:** (5 Punkte)

- a) Drücken Sie  $\cos^4 x$  aus als Linearkombination von Termen der Form  $\cos \alpha x$ !
- b) Zeigen Sie: Für jeden Winkel  $\varphi$  genügt  $z = \cos \frac{\varphi}{2}$  der quadratischen Gleichung

$$z^2 = \frac{1 + \cos \varphi}{2}!$$

- c) Berechnen Sie  $\sin \frac{\pi}{12}$  und  $\cos \frac{\pi}{12}$ !