

13. November 2009

10. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Was sind die Ableitungen von $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$?
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die einzige Funktion, für die $f'(x) = f(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 3) *Richtig oder falsch:* Wo hat die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ihre lokalen Maxima, wo ihre Minima?

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Funktionen die größte offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, auf denen sie definiert sind, und berechnen Sie dort die Ableitung!

$$f(x) = x \log x - x, \quad g(x) = \frac{x}{x+1}, \quad h(x) = e^{x+e^x}$$

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Unter der *logarithmischen Ableitung* $d \log(f)$ einer differenzierbaren Funktion f in einem Punkt x mit $f(x) \neq 0$ versteht man die Funktion $d \log(f)(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

- a) Berechnen Sie die logarithmischen Ableitungen der Funktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $g(x) = e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}$!
- b) Zeigen Sie: Ist $f(x) > 0$, so ist $d \log(f)$ die Ableitung von $\log f(x)$; ist $f(x) < 0$, so ist es die von $\log(-f(x))$.
- c) Für zwei Funktionen f, g gelten überall dort, wo $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ ist die Gleichungen $d \log(fg) = d \log f + d \log g$ und $d \log(f/g) = d \log f - d \log g$,
- d) Für ein Produkt $f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$ von n Funktionen mit $f(x) \neq 0$ ist $d \log f$ die Summe der Funktionen $d \log f_i$,

Aufgabe 6: (6 Punkte)

- a) Beim radioaktiven Zerfall verhält sich die Masse $m(t)$ des radioaktiven Materials zur Zeit t so, daß $m'(t) = -\lambda m(t)$ ist; die pro (kleiner) Zeiteinheit zerfallende Masse ist also proportional zur vorhandenen Masse. Die Zahl λ ist eine materialabhängige Konstante, die sogenannte Zerfallskonstante. Bringen Sie diese in Zusammenhang mit der Halbwertszeit $t_{1/2}$, d.h. jeder Zeit, zu der $m(t_{1/2}) = \frac{1}{2} m(0)$ ist!
- b) Das Caesium-137, das am 26. April 1986 in Tschernobyl freigesetzt wurde, hat eine Halbwertszeit von 30,14 Jahren. Welcher Prozentsatz davon ist bis zum 26. November 2009 zerfallen?
- c) LIBBYS Methode der radioaktiven Alterbestimmung beruht darauf, daß das Verhältnis zwischen dem stabilen Kohlenstoffisotop C^{14} und dem radioaktiven C^{12} in lebenden Organismen ungefähr konstant ist. Nach dem Tod des Organismus zerfällt das C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5763 Jahren, während das C^{12} erhalten bleibt. Bei einer Holzprobe aus den Höhlen von Lascaux maß man 0,97 Zerfälle pro Gramm und Minute; für lebendiges Holz maß man bis 1950 etwa 6,68 Zerfälle pro Gramm und Minute. Wie alt war die Probe?

Abgabe bis zum Freitag, dem 20. November 2009, um 10.15 Uhr