WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

30. Oktober 2009

8. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ wieder ein abgeschlossenes Intervall.

2) Richtig oder falsch: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden offenen Intervalls (a, b) wieder ein offenen Intervall.

3) Richtig oder falsch: Die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = [x]$ (GAUSS-Klammer) hat in jedem abgeschlossenen Intervall sowohl ein Maximum M als auch ein Minimum m, und es gibt Werte $x_m, x_M \in [a, b]$ mit $f(x_m) = m$ und $f(x_M) = M$.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - [x]$ hat in jedem abgeschlossenen Intervall sowohl ein Maximum M als auch ein Minimum m, und es gibt Werte $x_m, x_M \in [a, b]$ mit $f(x_m) = m$, und $f(x_M) = M$.

5) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$!

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^3 + 2x^2 - x - 1$ zwischen $x = -3$ und $x = 1$ mindestens eine Nullstelle hat!

b) Tatsächlich gibt es dort sogar drei Nullstellen. Finden Sie drei Intervalle $[a_i, b_i]$ mit ganzzahligen Grenzen, die jeweils genau eine dieser Nullstellen enthalten!

Aufgabe 7: *(7 Punkte)*
Sinus hyperbolicus und *Kosinus hyperbolicus* einer reellen Zahl x sind definiert als $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Zeigen sie:

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $\cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

c) $\sinh x$ ist eine monoton wachsende Funktion und hat eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte stetige Umkehrfunktion.

d) Drücken Sie $\sinh(x + y)$ sowie $\cosh(x + y)$ aus durch $\sinh x, \sinh y, \cosh x$ und $\cosh y$!

e) Wo ist $\cosh x$ monoton wachsend, wo monoton fallend?

Aufgabe 8: *(4 Punkte)*
$x_0 < x_1$ seien reelle Zahlen und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch die Formel

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad \text{für } n \geq 2\,.$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$!

Keine Abgabe – Abgegeben wird diese Woche nur die Klausur!