

23. Oktober 2009

7. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für zwei reelle Zahlen $x > y > 0$ ist $\log x > \log y$.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier offener Teilmengen eines metrischen Raums ist selbst offen.
- 3) *Richtig oder falsch:* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} .
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier offener Teilmengen D_1, D_2 eines metrischen Raums X ist selbst eine offene Teilmenge von X .
- 5) *Richtig oder falsch:* Ist $D \subset \mathbb{R}$ offen, so auch $\mathbb{R} \setminus D$.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: $\left(\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right] \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung für die EULERSche Zahl e .
- b) Zeigen Sie, daß die Länge des n -ten Intervalls kleiner ist als $e/n!$
- c) Wie groß muß n mindestens sein, damit auf Grund dieser Abschätzung die Zahl e mit einem Fehler von höchstens 0,01 berechnen können?

Aufgabe 7: (5 Punkte)

Der *dekadische* oder BRIGGSsche Logarithmus $y = \lg x$ einer positiven reellen Zahl x ist jene reelle Zahl y mit der Eigenschaft, daß $10^y = x$ ist.

- a) Was ist $\lg \sqrt{10}$?
- b) $\lg 2$ ist mit fünfstelliger Genauigkeit gleich 0,30103. Berechnen Sie nur mit dieser Information und ohne Taschenrechner auch die Werte von $\lg 2000$ und $\lg 1024$ mit entsprechender Genauigkeit!
- c) Das Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik hält Verschlüsselungsverfahren für sicher in Bezug auf die heute möglichen Angriffe, wenn ein erfolgreicher Angriff mindestens 2^{100} Rechenoperationen erfordert. Wie viele Dezimalstellen hat diese Zahl?
- d) Man sagt, zwei physikalische Signale mit Energien E_1 und E_2 haben einen Abstand von x dB oder Dezibel, wenn $10 \lg(E_1/E_2) = x$ ist. Bezeichnet speziell E_1 die Energie eines Nutzsignals (Musik, Sprache, ...) und E_2 die einer Störung, so redet man auch vom Störabstand oder Rauschabstand. Was ist E_1/E_2 bei einem Rauschabstand von 60 dB?
- e) Welchen Abstand in Dezibel haben zwei Signale, von denen das erste doppelt so stark ist wie das zweite?

Aufgabe 8: (5 Punkte)

Entscheiden Sie bei den folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie stetig sind und für welche nicht!

- a) $f(x) = e^{x^2+x+1}$ b) $g(x) = |x|$ c) $h(x) = x - [x]$
- Dabei bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x .

Abgabe bis zum Freitag, dem 30. Oktober 2009, um 10.15 Uhr