WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

16. Oktober 2009

6. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede Teilfolge einer monoton wachsenden Folge ist monoton wachsend.

2) Richtig oder falsch: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine reelle Folge derart, daß die Folge $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x oder gegen $-x$.

3) $A \subseteq \mathbb{R}$ habe die Zahl $M \in \mathbb{R}$ sowohl als obere wie auch als untere Schranke. Was können Sie über A sagen?

4) Richtig oder falsch: $A \subseteq \mathbb{R}$ sei beschränkt und habe mindestens zwei Elemente. Dann ist das Infimum von A echt kleiner als das Supremum.

5) Richtig oder falsch: Das offene Intervall $(0,1)$ mit Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)
Zeigen Sie:

a) Für zwei reelle x, y ist $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$!

b) Konvergieren die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und y, so konvergiert die Folge $\big(\max(x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\max(x,y)$.

c) Konvergiert auch die Folge $\big(\min(x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\min(x,y)$?

Aufgabe 7: (*6 Punkte*)
Welche der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$ sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Bestimmen Sie, sofern es existiert, auch Infimum und Supremum der Menge!

$$A = \left\{2 + \frac{3}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 10\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 > 10\}, \qquad D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 8: (*5 Punkte*)

a) $x_0 < x_1$ seien reelle Zahlen und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch die Formel

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad \text{für } n \ge 2\,.$$

Zeigen Sie, daß die Folge konvergiert!

b) Finden Sie eine konvergente Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^2-15} + \big(1+(-1)^n\big)(n^2-15)\,!$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 23. Oktober 2009, um 10.15 Uhr