

9. Oktober 2009

5. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Wenn die reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergiert gegen ∞ , ist sie monoton wachsend.
- 2) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- 3) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert die Folge $(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der konjugiert komplexen Zahlen gegen \bar{z} .
- 4) *Richtig oder falsch:* Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen reeller Zahlen, so ist auch $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.
- 5) *Richtig oder falsch:* Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen reeller Zahlen, so ist auch $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

- a) X sei eine beliebige Menge und die Funktion d ordne zwei Elementen x, y einen Abstand $d(x, y)$ zu gemäß der Vorschrift

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, daß d eine Metrik ist!

- b) Wann konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus X bezüglich dieser Metrik gegen ein Element $x \in X$?

Aufgabe 7: (3 Punkte)

Die Folge $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei ausgehend von $(x_0, y_0) = (1, 0)$ rekursiv definiert durch

$$(x_n, y_n) = (-y_{n-1}, x_{n-1}).$$

Berechnen Sie die ersten Folgenglieder, stellen Sie eine Vermutung über Konvergenz oder Nichtkonvergenz der Folge auf und beweisen Sie diese!

Aufgabe 8: (8 Punkte)

Entscheiden Sie bei jeder der hier definierten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert, ob sie beschränkt ist und ob sie monoton wachsend bzw. fallend ist!

a) $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ b) $x_n = \frac{n^3 + 3}{n^3 - 3}$ c) $x_n = 3^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ d) $x_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3 + 3}$