Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

2. Oktober 2009

4. Übungsblatt Analysis I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede surjektive Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst ist injektiv.

2) Richtig oder falsch: Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sind gleichmächtig.

3) Richtig oder falsch: Alle überabzählbaren Mengen sind gleichmächtig.

4) Richtig oder falsch: Die Vorschrift $d_{\min}\big((x,y),(u,v)\big) = \min\big(|x-u|\,,|y-v|\big)$ definiert eine Metrik auf der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$.

5) Richtig oder falsch: Ist d eine Metrik auf der Menge X, so ist auch die Funktion d^* mit $d^*(x,y) = 10d(x,y)$ für alle $x,y \in X$ eine Metrik auf X.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß es für jede natürliche Zahl n genau $(n+1)!$ injektive Abbildungen einer n-elementigen Menge A in eine $n+1$-elementige Menge B gibt!

b) Wie viele surjektive und wie viele bijektive Abbildungen $f\colon A \to B$ gibt es?

Aufgabe 7: *(3 Punkte)*

Berechnen Sie in einem Gleitkommasystem mit einer Mantisse aus drei Dezimalstellen und Exponenten zwischen -3 und $+3$ für $a = 0{,}889$, $b = 0{,}888$ und $c = 200$ die beiden Gleitkommazahlen $x = (a-b)c$ und $y = ac - bc$, wobei alle Zwischenergebnisse jeweils zur nächsten darstellbaren Zahl gerundet werden sollen. (Für die Berechnung von y gilt, wie üblich, daß Multiplikationen vor Addition und Subttraktion ausgeführt werden; ausführlicher geschrieben ist also $y = (ac) - (bc)$.)

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

Wir betrachten die Maximums-Metrik $d_{\max}$ sowie die Taxi-Metrik d_{tax} auf der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$.

a) Beschreiben Sie $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big) \le 1\big\}$ geometrisch!

b) Zeigen Sie: Zeigen Sie: Für zwei Punkte (x,y) und (u,v) aus $\mathbb{R}^2$ und ein $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{R}$ gilt: Ist $d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big) \le \varepsilon$, so ist $d_{\text{tax}}\big((x,y),(u,v)\big) \le 2\varepsilon$.

c) Finden Sie eine möglichst kleine reelle Zahl a, so daß unter den obigen Voraussetzungen gilt: Ist $d_{\text{tax}}\big((x,y),(u,v)\big) \le \varepsilon$, so ist $d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big) \le a\varepsilon$.

Abgabe bis zum Freitag, dem 9. Oktober 2009, um 10.15 Uhr