

11. September 2009

1. Übungsblatt Analysis I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für drei Mengen A, B, C ist $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Menge $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ist die Menge aller negativer ganzer Zahlen.
- 3) *Richtig oder falsch:* Es gibt eine rationale Zahl w mit $w^2 = 10$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Menge $\{0\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper.
- 5) *Richtig oder falsch:* In jedem angeordneten Körper ist $1 > 0$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

$A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ sei die Menge aller Zweierpotenzen, $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller Quadratzahlen und $C = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 100\}$.

- a) Was ist $A \cap B$?
- b) Was ist $A \setminus B$?
- c) Geben Sie die Elemente hat die Menge $(B \cap C) \setminus A$ explizit an!
- d) Wie viele Elemente hat $C \setminus B$?

Aufgabe 7: (5 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) Sind a, b, c Elemente eines Körper k und ist $a \neq 0$, so gibt es stets ein Element $x \in k$, so daß $ax + b = c$ ist.
- b) Für zwei beliebige Elemente u, v eines Körpers gilt:

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Aufgabe 8: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie für $n = 1, 2, 3$ und 4 die Summe der ersten n ungeraden Zahlen!
- b) Stellen Sie eine allgemeine Vermutung auf, was die Summe der ersten n ungeraden Zahlen sein sollte!
- c) Zeigen Sie: Die i -te ungerade Zahl ist $2i - 1$.
- d) Beweisen Sie die in $b)$ aufgestellte Vermutung durch vollständige Induktion!
- e) Was ist die Summe der ersten n geraden Zahlen

Abgabe bis zum Freitag, dem 18. September 2009, um 10.15 Uhr