Lösungsvorschläge zum Aufgabenblatt 03:

Frage 1.) Richtig!
Ist $(a_n)_{\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N_ε mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$. Wegen $|-a_n| = |a_n|$ gilt diese Abschätzung auch für die Folge $(-a_n)_{\mathbb{N}}$.

Frage 2.) Richtig!
Offensichtlich braucht das ε-Kriterium nur für $1 > \varepsilon > 0$ gezeigt werden. Ist nun N_ε für $\varepsilon < 1$ ein Index mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$, so gilt für die Folge $(a_n^2)_{\mathbb{N}}$ wegen $\varepsilon < 1$:

$$|a_n^2| = |a_n|^2 < \varepsilon^2 < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > N_\varepsilon.$$

Frage 3.) Richtig!
Da $(a_n)_{\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N_ε und einen Index M_ε mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_\varepsilon$ und $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > M_\varepsilon$. Mit $K_\varepsilon := \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$ folgt dann für alle $n > K_\varepsilon$:

$$|a_n - b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Frage 4.) Falsch!
$[a_n, b_n] := [0, 1/n]$ ist eine Intervallschachtelung, aber $I_n := [2a_n, 3b_n]$ nicht, da z.B. $I_2 \not\subseteq I_3$ gilt.

Aufgabe 6.a)
Kleine Formel/Herleitung für $\frac{1}{z} = z^{-1}$ für $z \in \mathbb{C}^*$, so daß $\frac{w}{z}$ als wz^{-1} berechnet werden kann:

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} z_1 =& 12 + 9i + 16i - 12 = 25i \\ z_2 =& (3+4i)\frac{4-3i}{|4+3i|^2} = \frac{12 - 9i + 16i + 12}{25} = \frac{24}{25} - \frac{7}{25}i \\ z_3 =& \frac{(1+i)\big((1+i)^2\big)^{1004}}{2^{1004}}(1+i)\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{1004} \\ =& (1+i)i^{1004} = (1+i)\big(i^4\big)^{251} = 1+i \end{aligned}$$

Die Formel zum Berechnen der Wurzel eines $z \in \mathbb{C}$ aus dem Skript hat in kompakter Form die Gestalt:

$$\sqrt{z} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\varepsilon\sqrt{|z| + \mathrm{Re}(z)} + (\delta\sqrt{|z| - \mathrm{Re}(z)})i\big)$$
$$\text{mit} \quad \varepsilon, \delta \in \{-1, 1\} \quad \text{und} \quad \varepsilon\delta = \operatorname{sign}\mathrm{Im}(z).$$

Damit folgt sofort:

$$z_{4/5} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sqrt{1+0} + (\sqrt{1-0})i\big) = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

(Eigentlich sind vier Zahlen zu berechnen, zwei Wurzeln aus $\sqrt{i}$ und zwei Wurzeln aus $-\sqrt{i}$, aber es fallen jeweils zwei Werte zusammen.)

Aufgabe 6.b)
Die Formel des Betrages einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ liefert sofort $|z| = |\bar{z}|$, und damit folgt:

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$

wobei die Einschränkung $z = (a, b) \neq (0, 0)$ dafür sorgt, daß in den Nennern der auftretenden Brüche nie die Null steht.

Aufgabe 7.)
Es gilt:

$$z^8 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (z^4)^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad z^4 \in \{-1, 1\}.$$

Im Skript sind die Gleichungen $z^4 = 1$ und $z^4 = -1$ ausgerechnet, und es folgt für die Lösungen der Ursprungsgleichung

$$z \in \{-1, 1, -i, i\} \cup \{\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon + \delta i) \mid \varepsilon, \delta \in \{-1, 1\}\ \}.$$

Aufgabe 8.)
Alle drei Gleichungen können mit der pq-Formel berechnet werden, wobei die Koeffizienten p, q komplexe Zahlen sein dürfen:

$$x^2 + px + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - 1}.$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x + 13 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9i^2} = 2 \pm 3i \\
x^2 - 2ix - 2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_{1/2} = i \pm \sqrt{i^2 + 2} = i \pm 1 = \pm 1 + i \\
x^2 - 2(1+i)x + 3 - 2i = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_{1/2} = 1 + i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 3 + 2i} \\
&\qquad\qquad = 1 + i \pm \sqrt{-3 + 4i}
\end{aligned}$$

Mit obiger Formel errechnet sich die Wurzel zu:

$$\sqrt{-3 + 4i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5 - 3} + (\sqrt{5 + 3})i) = \pm(1 + 2i),$$

und es folgt:

$$\Longrightarrow \qquad x_{1/2} = 1 + i \pm (1 + 2i) \in \{2 + 3i, -i\}$$

Lösungsvorschläge zum Aufgabenblatt 04:

Frage 1.) Richtig!
Für endliche Mengen M und N und eine Abbildung $f\colon M \longrightarrow N$ sind äquivalent:

$$f \text{ injektiv} \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ surjektiv} \quad\Longleftrightarrow\quad f \text{ bijektiv.}$$

Diese Äquivalenzen ergeben sich leicht aus „Platzgründen".

Frage 2.) Richtig!
Die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) := n + 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Bijektion.

Frage 3.) Falsch!
In der Vorlesung wurde bewiesen, daß es keine Bijektion von einer Menge M in ihre Potenzmenge $P(M)$ geben kann (Lemma Seite 60). Damit ist die Potenzmenge einer Menge immer mächtiger als diese selber, denn natürlich gibt es eine injektive Abbildung von $f\colon M \longrightarrow P(M)$ ($f(i) := \{i\}$ für $i \in M$), so daß $P(M)$ mindestens so groß ist wie $P(M)$, aber eben nicht genauso groß.
$\mathbb{R}$ ist überabzählbar, $P(\mathbb{R})$ eine mächtigere Menge als $\mathbb{R}$ und somit ebenfalls überabzählbar, und beide Mengen sind verschieden groß.

Frage 4.) Falsch!
Es gilt $(1, 0) \neq (2, 0)$, aber $d_{\min}\big((1, 0), (2, 0)\big) = 0$, was der Forderung

$$d(x, y) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = y$$

an eine Metrik d widerspricht.

Frage 5.) Richtig!
Der Faktor 10 verträgt sich mit Gleichungen/Ungleichungen:

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 \quad&\Longleftrightarrow\quad 10d(x, y) = 0 \\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad&\Longleftrightarrow\quad 10d(x, y) \leq 10d(x, y) + 10d(y, z) \end{aligned}$$

Aufgabe 6.)

a.) Der Induktionsanfang mit $n = 1$ für $A = \{a_1\}$ und $B = \{b_1, b_2\}$ ist einfach: $f_1(a_1) := b_1$ und $f_2(a_1) := b_2$ sind die beiden einzigen Abbildungen von A nach B.
Ein möglicher Induktionsschritt ($n \mapsto n + 1$) sieht wie folgt aus: Es seien für $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_{n+2}\}$ folgende Mengen defininiert:

$$\mathcal{F} := \{\ f\colon A \longrightarrow B \mid f \text{ injektiv } \}$$

und

$$\mathcal{F}_i := \{\ f \in \mathcal{F} \mid f(a_{n+1}) := b_i\ \},$$

wobei der Index der Mengen $\mathcal{F}_i$ von 1 bis $n + 2$ läuft.
Für $i \neq j$ und $f \in \mathcal{F}_i$, $g \in \mathcal{F}_j$ gilt immer $f \neq g$, so daß $\mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}_j$ disjunkt sind.
Für einen Index $1 \leq i \leq n + 2$ gibt es eine offensichtlich eineindeutige Zuordnung

$$\mathcal{F}_i \quad \longleftrightarrow \quad \{\ \bar{f}\colon A \setminus \{a_{n+1}\} \longrightarrow B \setminus \{b_i\} \mid \bar{f} \text{ injektiv } \},$$

und nach Induktionsannahme ist die rechte Menge von der Mächtigkeit $(n + 1)!$.
Somit ist $\mathcal{F}$ die disjunkte Vereinigung der $n + 2$ Mengen $\mathcal{F}_i$, die jeweils die Mächtigkeit $(n + 1)!$ haben, und $\mathcal{F}$ hat die Mächtigkeit $(n + 2)!$.

b.) keine.

Aufgabe 7.)

Aufgabe 8.)
Es gilt im $\mathbb{R}^2$:

$$d_{\max}\big((x, y), (u, v)\big) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$$
$$d_{\text{tax}}\big((x, y), (u, v)\big) = |x - u| + |y - v|$$

a.) Quadrat um (u, v) mit der Kantenlänge 2 und (u, v) im Mittelpunkt. Die Eckpunkte sind $(u+1, v+1)$, $(u+1, v-1)$, $(u-1, v+1)$ und $(u - 1, v - 1)$.

b.) Aus $\max\{|x - u|, |y - v|\} \leq \varepsilon$ folgt sofort

$$d_{\text{tax}}\big((x, y), (u, v)\big) = |x - u| + |y - v| \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

c.) Es gilt für $x := u + \varepsilon$ und $y := v$:

$$d_{\text{tax}}\big((x,y),(u,v)\big) = \varepsilon \quad \text{und} \quad d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big) = \varepsilon,$$

so daß für einen möglichen Faktor a die Beziehung $a \geq 1$ gelten muß.
Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big) &= \max\{|x-u|, |y-v|\} \\ &\leq |x-u| + |y-v| = d_{\text{tax}}\big((x,y),(u,v)\big), \end{aligned}$$

so daß alle $a \geq 1$ die Abschätzung erfüllen. Somit ist $a = 1$ der kleinstmögliche Faktor mit

$$d_{\text{tax}}\big((x,y),(u,v)\big) \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad d_{\max}\big((x,y),(u,v)\big) \leq a\varepsilon.$$

Anschaulich bedeuten die gezeigten Abschätzungen zwischen den beiden Metriken das Folgende: Wird für eine Metrik d auf einem metrischen Raum X der abgeschlossene ε-Ball um einen Punkt $x \in X$ definiert durch

$$\bar{B}_\varepsilon(x) := \{\, y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon \,\},$$

und bezeichnet $\bar{B}^t_\varepsilon(x)$ den abgeschlossenen ε-Ball um x bzgl. der Taxi- und $\bar{B}^m_\varepsilon(x)$ denjenigen bzgl. der Maximums-Metrik, so wurde gezeigt:

$$\bar{B}^t_\varepsilon(x) \overset{\text{c.)}}{\subseteq} \bar{B}^m_\varepsilon(x) \overset{\text{b.)}}{\subseteq} \bar{B}^t_{2\varepsilon}(x).$$

Lösungsvorschläge zum Aufgabenblatt 05:

Frage 1.) Falsch!
Die Folge (a_n) mit $a_1 := 1$, $a_2 := 0$ und $a_n := n$ für $n \geq 3$ ist bestimmt divergent gegen ∞, aber wegen $a_2 < a_1$ nicht monoton steigend.

Frage 2.) Richtig!
Sei $|y_n| < B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ einen Index N_ε mit $|x_n| < \frac{\varepsilon}{B}$ für $n > N_\varepsilon$ (da (x_n) eine Nullfolge ist), und es folgt

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq |x_n|B \qquad \Longrightarrow \qquad |x_n y_n| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon,$$

und $(x_n y_n)$ ist ebenfalls eine Nullfolge.

Frage 3.) Richtig!
Wegen $|w| = |\bar{w}|$ und $\bar{w} - \bar{w}_n = \overline{w - w_n}$ für komplexe Zahlen $w, w_n \in \mathbb{C}$ gilt bzgl. der Konvergenzabschätzungen die Beziehung

$$|z - z_n| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\bar{z} - \bar{z}_n| < \varepsilon,$$

und (z_n) konvergiert somit genau dann gegen z, wenn $(\bar{z}_n)$ gegen $\bar{z}$ konvergiert.

Frage 4.) Richtig!

$$x_n \leq x_{n+1}, \quad y_n \leq y_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad x_n + y_n \leq x_{n+1} + y_n \leq x_{n+1} + y_{n+1}$$

Frage 5.) Falsch!
$\big(-\frac{1}{n}\big)$ und (n^2) sind monoton wachsende Folgen, aber

$$\Big(-\frac{1}{n} \cdot n^2\Big) = (-n)$$

ist streng monoton fallend.

Aufgabe 6.)

a.) Es sind die drei Eigenschaften einer Metrik nachzuprüfen:

$$d(x,y)=0 \quad\iff\quad x=y$$

Dies folgt sofort aus der Definition von d.

$$d(x,y)=d(y,x)$$

Auch dies ist nach Definition von d ebenso klar.

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$$

Wenn $x=z$ gilt, ist die linke Seite der Ungleichung 0, und da auf der rechten Seite auch nur positive Werte stehen, gilt die Ungleichung. Gilt $x\ne z$, so ist mindestens entweder $x\ne y$ oder $y\ne z$ (evt. sogar alle Punkte verschieden), und auf der linken Seite der Ungleichung steht 1, und auf der rechten Seite ist mindestens ein Summand 1: somit gilt die Ungleichung.

b.) Die Folge (x_n) konvergiert bzgl. der Metrik d genau dann gegen x, wenn es einen Index $N\in\mathbb{N}$ gibt mit $x_n=x$ für $n>N$, d.h. (x_n) ist ab einem Index konstant x.
Dies ist wie folgt einzusehen: Wähle $\varepsilon:=\frac{1}{2}$, und (x_n) sei konvergent gegen x. Dann gibt es einen Index $N\in\mathbb{N}$ mit

$$d(x,x_n)<\frac{1}{2}\quad \text{für}\quad n>N,$$

und da $d(x,x_n)\in\{0,1\}$ gilt, muß dann für jedes x_n mit $n>N$ die Beziehung

$$d(x,x_n)=0 \quad\iff\quad x=x_n$$

gelten.
Daß eine ab einem Index konstante Folge gegen diese Konstante konvergiert, ist in jeder Metrik klar.

Aufgabe 7.)
Es gilt $(x_n,y_n):=\big(\mathrm{Re}(i^n),\mathrm{Im}(i^n)\big)$ für $n\in\mathbb{N}_0$ (komplexe Zahl $i\in\mathbb{C}$), wie nun durch Induktion bewiesen wird:
Der Induktionsanfang $n=0$ ist wegen $i^0=1$ klar.
Für den Induktionsschritt reicht es, folgende Gleichung zu betrachten:

$$z=a+ib\in\mathbb{C}\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Re}(iz)=-b,\quad \mathrm{Im}(iz)=a.$$

Die komplexe Folge (i^n) ist nicht konvergent, denn der Abstand zwischen zwei beliebigen Folgengliedern ist mindestens $\sqrt{(2)}$ (euklidische Metrik), so daß keine Konvergenz gegen irgendeinen Punk möglich ist. (Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge!)

Aufgabe 8.)

a.) Die Folge konvergiert gegen 0 und ist somit beschränkt. Sie hat kein Monotonieverhalten wegen des wechselnden Vorzeichens.

b.) Die Folge konvergiert gegen 1 und ist somit auch beschränkt. Sie hat kein Monotonieverhalten, da $x_1 < x_2$, aber $x_2 > x_3$ gilt.

c.) De Folge ist bestimmt divergent gegen ∞ und monoton wachsend. Wegen $\frac{1}{3^n} \leq 1$ wird dieser Term bei allen Argumenten durch 3^n dominiert.

d.) Die Folgen $(|x_n|)$ konvergiert gegen 1, so daß (x_n) beschränkt ist. Wegen $x_n = (-1)^n|x_n|$ konvergiert sie nicht (wechselndes Vorzeichen), sie hat die beiden Häufungspunkte -1 und 1, und damit auch kein Monotonieverhalten.

Lösungsvorschläge zum Aufgabenblatt 06:

Frage 1.) Richtig!
Wäre eine Teilfolge von (x_i) nicht monoton wachsend, gäbe es Folgenglieder x_n, x_m mit $n < m \in \mathbb{N}$ mit $x_n > x_m$.
(x_n) monoton wachsend bedeutet aber $x_i \leq x_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, woraus mit Induktion sofort $x_n \leq x_{n+k}$ folgt für alle $k \in \mathbb{N}$, insbesondere also $x_n \leq x_m$.

Frage 2.) Falsch!
Für $x_n := (-1)^n$ konvergiert $(|x_n|)$ gegen 1, aber (x_n) konvergiert weder gegen 1 noch -1.

Frage 3.) $A = \{M\}$ oder $A = \emptyset$!
Ist $A \neq \emptyset$, so gilt für alle $x \in A$ die Ungleichungskette $M \leq x \leq M$, woraus sofort $x = M$ folgt. Somit enthält A nur das Element M.

Frage 4.) Richtig!
Wegen der Beschränktheit von A existieren deren Supremum S und Infimum I. Seien $a, b \in A$ mit $a \neq b$ und $a < b$. Dann gilt:

$$I \leq a < b \leq S \quad \Longrightarrow \quad I < S.$$

Frage 5.) Falsch!
$(\frac{1}{n})$ ist eine Cauchy-Folge in $(0,1)$ bzgl. der genannten Metrik, deren Grenzwert nicht in $(0,1)$ liegt: im umgebenden metrischen Raum $\mathbb{R}$ konvergiert diese Folge gegen 0, und das Konvergenzverhalten ändert sich durch die Einschränkung auf $(0,1)$ nicht.

Aufgabe 6.)
a.) Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{für } x \geq y, \\ y-x & \text{für } x < y. \end{cases}$$

Damit läßt sich sofort die Behauptung verifizieren:

$$(x \geq y) \qquad \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max(x,y)$$

$$(x < y) \qquad \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max(x,y)$$

b.) Da die Folge (x_n) gegen x und (y_n) gegen y konvergiert, folgt sofort nach bekannten Regeln für Konvergenz von Summen, Differenzen und den Betrag von Folgen:

$$x_n - y_n \longrightarrow x - y \qquad \Longrightarrow \qquad |x_n - y_n| \longrightarrow |x - y| \qquad \Longrightarrow$$

$$\max(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n + |x_n - y_n|}{2} \longrightarrow \frac{x + y + |x - y|}{2} = \max(x, y).$$

c.) Es gilt mit analogen Argumenten wie in Teil a.) und b.):

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \min(x_n, y_n) \longrightarrow \min(x, y).$$

Aufgabe 7.)

(Ein angenommenes Supremum ist ein Maximum, ein angenommenes Infimum ein Minimum.)

A**:** Es gilt $\max(A) = 5$ und $\inf(A) = 2$.

B**:** Es gilt $\sup(B) = \sqrt[3]{10}$, und B ist nicht nach unten beschränkt, da x^3 das Vorzeichen erhält und damit beliebig kleine negative (aber betragsmäßig große) Zahlen in der Menge enthalten sind.

C**:** Es gilt $\inf(C) = \sqrt[3]{10}$, und C ist nicht nach oben beschränkt.

D**:** Es gitl $\min(D) = 0$, und D ist nicht nach oben beschränkt.

Aufgabe 8.)

a.)

b.) Sei (x_{n_k}) die Teilfolge mit $n_k := 2k - 1$ (ungerade Glieder der Ursprungsfolge. Da $(-1)^n = -1$ für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt, fällt der hintere Term $(1 + (-1)^n)(n^2 - 15)$ der Ursprungsfolge immer weg, und es gilt:

$$x_{n_k} = 3 + \frac{(-1)^{n_k}}{n_k^2 - 15} = 3 - \frac{1}{n_k^2 - 15}$$

(auch hier wurde $(-1)^{n_k} = -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ausgenutzt).
Da $\frac{1}{n_k^2 - 15}$ gegen Null konvergiert, hat die Teilfolge dann den Grenzwert 3.

Lösungsvorschläge zum Aufgabenblatt 07:

Frage 1.) Richtig!
Wäre $\log(x) \leq \log(y)$, so würde im Widerspruch zur Annahme folgen:

$$\log(x) \leq \log(y) \overset{e^x \text{ monoton}}{\Longrightarrow} e^{\log(x)} \leq e^{\log(y)} \Longrightarrow x \leq y.$$

(Die Monotonie von e^x ist im Skript auf Seite 117 zu finden.)

Frage 2.) Richtig!
(siehe 4.)

Frage 3.) Richtig!
Für zwei komplexe Zahlen $z = z_1 + iz_2$ und $w = w_1 + iw_2$ gilt:

$$d(z, w) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \max(|z_1 - w_1|, |z_2 - w_2|) < \varepsilon$$

wegen

$$d(z, w) = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2} \geq \max(|z_1 - w_1|, |z_2 - w_2|).$$

Ist nun $z = z_1 + iz_2 \in D$, so gilt $z_2 > 0$, und für $\varepsilon := \frac{z_2}{2}$ ist nach obiger Aussage jedes $w = w_1 + iw_2$ mit $d(z, w) < \varepsilon$ wegen $|z_2 - w_2| > \frac{z_2}{2} > 0$ ebenfalls in D.

Frage 4.) Richtig!
Zu zeigen ist für $x \in D_1 \cup D_2$, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $y \in D_1 \cup D_2$ für alle y mit $d(x, y) < \varepsilon$.
Es sind D_1 und D_2 offen, und x liegt in einer der beiden Mengen (evt. in beiden). Sei o.B.d.A. $x \in D_1$. Dann gibt es ein ε, für das gilt:

$$d(x, y) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad y \in D_1 \subset D_1 \cup D_2,$$

was zu zeigen war.

Frage 5.) Falsch!
Für $D :=]0, 1[$ ist $\mathbb{R} \setminus D =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ nicht offen, da an den Intervallgrenzen 0 und 1 keine ε-Bereiche um die jeweilige Grenze 0 oder 1 in $\mathbb{R} \setminus D$ enthalten sind.

Aufgabe 6.a)

Sei $I_n := [(1+\frac{1}{n})^n, (1+\frac{1}{n})^{n+1}]$ für $n \in \mathbb{N}$. Bemerkung dazu: wegen $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + \frac{1}{n} > 1$ und

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \tag{1}$$

so daß die Obergrenze von I_n wirklich größer ist als die Untergrenze von I_n und damit dieses ein echtes Intervall.
Es wird nun gezeigt, daß $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, d.h. daß gilt:

$$I_{n+1} \subseteq I_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} |I_n| = 0.$$

Um $I_{n+1} \subseteq I_n$ zu zeigen, muß folgende Ungleichungskette verifiziert werden:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{(*)}{\leq} \overbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \overset{(**)}{\leq} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}^{I_{n+1}} \overset{(***)}{\leq} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{I_n}.$$

Dabei gilt $(*)$ nach dem Skript der Vorlesung, S. 110 unten mit $x = 1$. Die Ungleichung bei $(**)$ gilt wegen (1), da I_{n+1} ein echtes Intervall ist mit einer Obergrenze größer als der Untergrenze.
Nachzuweisen bleibt noch $(***)$:

$$\begin{aligned}
& \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
\iff \quad & 1 \leq \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}} \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2}} \\
\iff \quad & 1 \leq \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n} \frac{\frac{n+1}{n}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n} \frac{(n+1)^3}{n(n+2)^2} \\
\iff \quad & \frac{n(n+2)^2}{(n+1)^3} \leq \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n}
\end{aligned}$$

(Wegen $n \in \mathbb{N}$ sind bei allen Umformungen nur Faktoren größer 0 aufgetreten und damit die Ungleichungen äquivalent!)
Der rechte Term der Ungleichung kann mit der Bernoulli-Ungleichung abgeschätzt werden zu:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n} \geq 1 + n\frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n+2},$$

so daß es reicht, folgende Ungleichung zu zeigen:

$$\frac{n(n+2)^2}{(n+1)^3} \leq 1 + \frac{1}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}.$$

Auch in der folgenden Umformungen sind alle Faktoren wegen $n \in \mathbb{N}$ positiv und damit Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& & \frac{n(n+2)^2}{(n+1)^3} &\leq \frac{n+3}{n+2} \\
&\iff & n(n+2)^3 &\leq (n+3)(n+1)^3 \\
&\iff & n(n^3+2n^2+4n+8) &\leq (n+3)(n^3+3n^2+3n+1) \\
&\iff & n^4+6n^3+12n^2+8n &\leq n^4+6n^3+12n^2+10n+3 \\
&\iff & 0 &\leq 2n+3.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung $I_{n+1} \subseteq I_n$ bewiesen.
Um $\lim |I_n| = 0$ zu zeigen, wird zuerst $|I_n|$ betrachtet:

$$(2) \qquad |I_n| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}-1\right)}_{\frac{1}{n}}$$

$$|I_n| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}.$$

Nach der Vorlesung (Skript S. 116 oben) gilt $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, so daß insgesamt folgt:

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{\to e}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} = 0.$$

Somit ist nun zusammenfassend gezeigt, daß $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist. Diese konvergiert gegen eine Zahl x, und es muß noch gezeigt werden, daß $x = e$ gilt.
Da bei einer Intervallschachtelung sowohl die Unter- als auch die Obergrenze gegen den Grenzwert konvergieren, ist $x = e$ wieder nach der Vorlesung klar, da die Untergrenzen von I_n gegen e konvergieren (Skript S. 116 oben).

Aufgabe 6.b,c)

Die Aufgabe 6.b) ist schon fast in 6.a) gezeigt worden in der Gleichung (2): die dortige Gleichung für $|I_n|$ zusammen mit dem Beweis der Vorlesung, daß $[(1+\frac{1}{n})^n, (1-\frac{1}{n})^{-n}]$ eine Intervallschachtelung für e ist und damit $(1+\frac{1}{n})^n$ von unten gegen e konvergiert, liefert die gewünschte Aussage:

$$|I_n| = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} \leq \frac{e}{n}.$$

Aufgabe 6.) ergibt sich dann aus der Rechnung

$$|I_n| \leq \frac{e}{n} \leq 0.01 \quad \Longrightarrow \quad \frac{e}{0.01} \leq n \quad \Longrightarrow \quad 271.83 \leq n.$$

Aufgabe 7.)

a.) Es gilt:

$$\lg(\sqrt{10}) = \lg(10^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\underbrace{\lg(10)}_{=1} = \frac{1}{2}.$$

Dieses Ergebnis kann auch mit folgendem Ansatz erzielt werden:

$$\begin{aligned}\sqrt{10}\sqrt{10} = 10 \quad \Longrightarrow \quad 1 &= \lg(10) = \lg(\sqrt{10}\sqrt{10}) \\ &= \lg(\sqrt{10}) + \lg(\sqrt{10}) = 2\lg(\sqrt{10}).\end{aligned}$$

b.)

$$\lg(2000) = \lg(2\cdot 10^3) = \lg(2) + 3\lg(10) = \lg(2) + 3 \approx 3.30103$$
$$\lg(1024) = \lg(2^{10}) = 10\lg(2) \approx 3.0103$$

c.)

$$\lg(2^{100}) = 100\lg(2) \approx 301.03 \approx 301.$$

d.)

$$\begin{aligned}10\lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 60 \quad &\Longrightarrow \quad \lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 6 \quad \Longrightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = 10^6 \\ &\Longrightarrow \quad E_1 = 10^6 E_2\end{aligned}$$

e.)

$$E_1 = 2E_2 \quad \Longrightarrow \quad 10\lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 10\lg(2) = 3.0103.$$

Aufgabe 8.)

In den Beweisen wird ausgenutzt, daß die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient und die Komposition stetiger Funktionen stetig ist.

Eine weitere Voraussetzung ergibt sich dann sofort aus den oben genannten Regeln: Alle Polynome sind stetig! Die erhält sofort aus folgenden Argumenten:
Die Funktion $f(x) = x$ ist stetig, wie die Folgenstetigkeit sofort liefert:

$$x_n \to x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_n) = x_n \to x = f(x).$$

Eine kleine Induktion zeigt dann, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Monome $f(x) = x^n$ stetig sind als Produkte der Funktion x:

$$\underbrace{x^{n-1}}_{\text{stetig nach Induktionsannahme}} \cdot \underbrace{x}_{\text{stetig}} = \underbrace{x^n}_{\text{Produkt stetiger Funkt.}} \quad \text{stetig}$$

Die Folgenstetigkeit zeigt sofort, daß die Konstanten Funktionen $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ stetig sind:

$$x_n \to x \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_n) = a \to a = f(x).$$

Damit sind die Funktionen $f(x) = ax^n$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ stetig, und somit auch alle Polynome als Summen solcher stetiger Terme.
(Ich denke, dies ist eine kleine Übung, die alle Studenten lernen sollten.)

a.) $f(x) = e^{x^2+x+1}$ ist stetig. Hier ist $f(x)$ die Komposition der stetigen Funktionen e^x und $x^2 + x + 1$ (siehe Vorbetrachtungen).

b.) $g(x) = |x|$ ist stetig. Die Betragsfunktion ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Die Terme x und $-x$ sind nach den Vorbemerkungen stetig, so daß daraus in den offenen Teilmengen $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$ die Stetigkeit von g folgt. Lediglich an der Stelle 0 muß also gesondert geprüft werden, ob g stetig ist, was die Folgenstetigkeit wieder schnell liefert:

$$x_n \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |x_n| \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g(x_n) \to 0 = g(0).$$

c.) $h(x) = x - [x]$ ist unstetig. Diese Funktion ist an den ganzen Zahlen jeweils unstetig, es reicht jedoch, eine Unstetigkeitsstelle zu beweisen (da dann die Funktion schon unstetig ist).
Für die Funktion $k(x) = [x]$ gilt im Intervall $[-0.5, 0.5]$:

$$k(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -0.5 \leq x < 0, \\ 0 & \text{für } 0 \leq x < 0.5. \end{cases}$$

Somit gilt für die Nullfolge $x_n := -\frac{1}{n}$:

$$k(x_n) = -1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad k(x_n) \to -1 \neq 0 = k(0),$$

und $k(x)$ ist nicht stetig (in 0). Daraus folgt dann für $h(x)$ und die gleiche Nullfolge $x_n := -\frac{1}{n}$:

$$h(x_n) = x_n + 1 \to 1 \neq 0 = h(0).$$

Aus der Unstetigkeit von $k(x)$ hätte man auch ohne Rechnung auf die Unstetigkeit von $h(x) = x - k(x)$ schließen können: wegen $k(x) = x - h(x)$ würde aus der Stetigkeit von $h(x)$ die Stetigkeit von $k(x)$ folgen, da auch x und die Differenz stetiger Funktionen stetig ist, was aber im Widerspruch zur Unstetigkeit von $k(x)$ steht.