Aussagen zu den Ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ und zu den Ringen R_d der ganzen Zahlen in den quadratischen Zahlkörpern $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$

Quellen: Bücher zur Algebra und Bücher zur Zahlentheorie, insbesondere:
G. Scheja, U. Storch: Lehrbuch zur Algebra, Teil 2. Teubner, Stuttgart, 1978. [§ 59]
G.H. Hardy, E.M. Wright: An introduction to the theory of numbers. Clarendon Press, Oxford, 1979, 5th edition. [XIV und XV, insb. 15.7]
H.M Stark: An introduction to number theory. Cambridge, Massachusetts, 1978. [8.4]

7.29 Sätze zu $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, hier ohne Beweise:

Sei $d \in \mathbb{Z}$, d kein Quadrat. Die Menge

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{d}.$$

ist wegen $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{C}$ ein Integritätsring.

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist **kein** ZPE-Ring, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:

(i) $d \leq -3$.

(ii) $d \equiv 1 \mod 4$.

(iii) d ist nicht quadratfrei, d.h. es gibt eine Primzahl p mit $p^2 \mid d$.

(iv) $m \mid d$ mit $m \in \{5, 13, 21, 29, 37, 53, 61, 69, 77, 93\}$.

(b) Ungelöstes Problem: Ist die Menge $\{d \in \mathbb{N} \mid \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist ein ZPE-Ring$\}$ endlich oder unendlich?

(c)

$$\begin{aligned} & \{d \in \mathbb{Z} \mid d \leq 50 \text{ und } \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \text{ ist ein ZPE-Ring}\} \\ = \ & \{-2, -1, 2, 3, 6, 7, 11, 14, 19, 22, 23, 31, 38, 43, 46, 47\}. \end{aligned}$$

(d) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ZPE-Ring $\iff$ $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ Hauptidealring.

(e)

$$\begin{aligned} & \{d \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \text{ ist mit der Gradfunktion} \\ & \qquad |N| : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{N} \cup \{0\} \\ & \qquad\quad a + b\sqrt{d} \mapsto |(a+b\sqrt{d})(a-b\sqrt{d})| = |a^2 - b^2 d| \\ & \quad \text{ein Euklidischer Ring}\} \\ = \ & \{-2, -1, 2, 3, 6, 7, 11, 19\} \\ \subset \ & \{d \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \text{ ist (mit einer geeigneten Gradfunktion) ein Euklidischer Ring}\}. \end{aligned}$$

In $\subset$, gilt dort $=$ oder $\neq$? Ungelöstes Problem für $d > 0$.

(f) 1984 (heute immer noch?) wußte man nicht einmal, ob der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ mit einer geeigneten Gradfunktion Euklidisch ist (er ist ein Hauptidealring wegen (c) und (d)).

7.30 Sätze zu $R_d \subset \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, hier ohne Beweise:

Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, und

$$\omega := \begin{cases} \sqrt{d} & \text{falls } d \equiv 2 \text{ oder } 3 \mod 4, \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2} & \text{falls } d \equiv 1 \mod 4. \end{cases}$$

Die Menge

$$R_d := \mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \omega$$

ist ein Integritätsring.

(a) (Ohne Erläuterungen) $\mathbb{Q}[\omega] = \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{d} \subset \mathbb{C}$ ist ein Körper, ein "quadratischer Zahlkörper". R_d ist der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

(b) Ungelöstes Problem: Ist die Menge $\{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ quadratfrei}, R_d \text{ ist ein ZPE-Ring}\}$ endlich oder unendlich?

(c)

$$\begin{aligned} & \{d \in \mathbb{Z} \mid d \text{ quadratfrei},\ d \leq 50,\ R_d \text{ ist ein ZPE-Ring}\} \\ = \ & \{-163, -67, -43, -19, -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, \\ & \quad 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 29, 31, 33, 37, 38, 41, 43, 46, 47\}. \end{aligned}$$

Bemerkungen zum Fall $d < 0$: Vermutung von Gauß; 1967/1969 Beweise von Heegner und Stark nach Vorarbeiten ($\sim$ 1934) von Heilbronn, Linfoot und anderen.
Ende 1966 kannte man die 9 genannten Zahlen -163, -67, -43, -19, -11, -7, -3, -2, -1 und wußte: es gibt höchstens eine 10te, und falls es sie gibt, ist sie größer als $10^{9000000}$.
Heegner und Stark haben dann gezeigt, daß es keine 10te gibt. Die Beweise benutzen holomorphe Funktionen, Potenzreihenentwicklungen, Ableiten und Integrieren.

(d) R_d ZPE-Ring $\iff$ R_d Hauptidealring.

(e)

$$\begin{aligned} & \{d \in \mathbb{Z} \mid d \text{ quadratfrei}, R_d \text{ ist mit der Gradfunktion} \\ & \qquad |N| : R_d \to \mathbb{N} \cup \{0\} \\ & \qquad a + b\sqrt{d} \mapsto |(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})| = |a^2 - b^2 d| \\ & \qquad \text{ein Euklidischer Ring}\} \\ = \ & \{-11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73\} \\ \subset \ & \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ quadratfrei}, R_d \text{ ist (mit einer geeigneten Gradfunktion) ein Euklidischer Ring}\}. \end{aligned}$$

In $\subset$, gilt dort $=$ oder $\neq$? Ungelöstes Problem für $d > 0$.

(f) Für $d < 0$ gilt:

$$\{d \in \mathbb{Z} \mid d < 0, d \text{ quadratfrei}, R_d \text{ Euklidischer Ring}\} = \{-11, -7, -3, -2, -1\}.$$

(g) Aus (c)+(d)+(f) folgt: Die Ringe R_d mit $d \in \{-163, -67, -43, -19\}$ sind Hauptidealringe, aber keine Euklidischen Ringe.