10.6 Ein langes Beispiel zur Galoistheorie (ohne Beweis)

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
Eisensteinkriterium (7.25 (c)) mit $p = 2 \Rightarrow f(x)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
Ohne Beweis: Die 4 Nullstellen von $f(x)$ sind

$$\alpha_{1/3} = 1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{3 + \sqrt{2}}, \quad \alpha_{2/4} = 1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{3 - \sqrt{2}}.$$

$L := \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ist der Zerfällungskörper von $f(x)$.

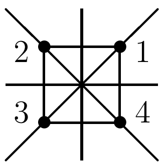
Ohne Beweis: Der injektive Gruppenhomomorphismus $\pi : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \hookrightarrow S_4$ mit

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Perm}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}) \xrightarrow{\cong} S_4$$

erfüllt

$$\begin{aligned} \mathit{Bild}(\pi) &= \{\mathrm{id}, (1\,3), (2\,4), (1\,2)(3\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2)\} \subset S_4 \\ &\cong \text{ Diedergruppe } D_8 \end{aligned}$$

Das nächste Bild soll helfen, schnell geometrisch zu sehen, welche Permutationen in dieser Gruppe $\mathit{Bild}(\pi)$ sind. Es zeigt die 4 Spiegelachsen der 4 Spiegelungen der Symmetriegruppe D_8 eines reguläres Vierecks; dazu kommen die 4 Drehungen um die Winkel 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Die 4 Eckpunkte des Vierecks sind so mit 1,2,3,4 benannt, daß die oben angegebene Einbettung von D_8 in S_4 induziert wird.



Auf der folgenden Seite ist das erste Diagramm der Verband aller Untergruppen von $\mathit{Bild}(\pi)$. Die Striche zeigen, welche Gruppen ineinander enthalten sind.
Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie sind die Unterkörper

$$L^U := \{a \in L \mid \forall\, g \in U \;\; g(a) = a\} \subset L$$

zu den Untergruppen $U \subset \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ alle verschieden, und sie sind alle Unterkörper von L. Das zweite Diagramm zeigt zu jeder Untergruppe $\pi(U) \subset \mathit{Bild}(\pi)$ den Körper L^U.
Zum Nachweis kann man benutzen:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4), \\ \sqrt{3+\sqrt{2}} &= \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_3), \quad \sqrt{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_4), \\ \sqrt{7} &= \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4). \end{aligned}$$

Die Untergruppen der Ordnungen 4 sind alle Normalteiler. Von den 5 Untergruppen der Ordnung 2 ist die mittlere ein Normalteiler, die linken beiden sind konjugiert zueinander, und die rechten beiden sind konjugiert zueinander.