Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Dr. Christian Sevenheck

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(3 Punkte)* Nach Blatt 8, Aufgabe 5, ist der Ring $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i \subset \mathbb{C}$ ein Euklidischer Ring, also (Satz 7.14 der Vorlesung) auch ein Hauptidealring. Daher sind die folgenden 6 Ideale Hauptideale. Finden Sie je ein Erzeugendes (mit Beweis).

$$(3, i), \quad (4+4i, 8i), \quad (2-i, 2+i), \quad (1+i, 1-i), \quad (5, 3+4i), \quad (10, 7+i).$$

2. *(4 Punkte)* Für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt es 2^m unitäre Polynome vom Grad m im Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$. Weil $\mathbb{F}_2[x]$ ein Euklidischer Ring und damit ein ZPE-Ring ist, läßt sich jedes unitäre Polynom vom Grad ≥ 1 eindeutig als Produkt von unitären und irreduziblen Polynomen schreiben. Listen Sie alle 30 unitären Polynome vom Grad $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ und ihre Produkt-Zerlegungen in unitäre und irreduzible Polynome auf.

   Hinweis: Beachten Sie Aussage (d) in der Liste in Aufgabe 3.

3. *(4 Punkte)* Ist R ein Integritätsring, so auch $R[x]$ (Blatt 7, Aufgabe 2 (a)), und der Begriff "irreduzibel" (Definition 7.17 (a) der Vorlesung) ist wohldefiniert für Polynome in $R[x]$. Bei Irreduzibilitätsuntersuchungen von Polynomen gibt es ganz verschiedene nützliche Kriterien und Aussagen. Einige sind hier aufgelistet:

   (a) Eisenstein-Kriterium (7.25 (c) in der Vorlesung): Sei R ein ZPE-Ring (z.B. $R = \mathbb{Z}$) und $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in R[x]$ mit $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Sei $p \in R$ ein Primelement mit
   $$p \,|\, a_j \text{ für } j \leq n-1, \; p \nmid a_n, \; p^2 \nmid a_0.$$
   Dann ist $f(x)$ irreduzibel in $R[x]$.

   (b) Die Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ (p eine Primzahl) induziert einen Ringhomomorphismus $\pi_p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{F}_p[x]$. Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dann gilt: $\pi_p(f(x))$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_p[x] \Rightarrow f(x)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.

   (c) Sei R ein ZPE-Ring, K sein Quotientenkörper (z.B. $R = \mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Q}$) und $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Dann gilt (7.25 (b) in der Vorlesung):
   $f(x)$ ist irreduzibel in $R[x] \Rightarrow f(x)$ ist irreduzibel in $K[x]$.
   Ist $\mathrm{ggT}(a_n, ..., a_0) = 1$, so gilt $\iff$.

   (d) Sei R ein Integritätsring (z.B. $R = \mathbb{Z}$ oder R ein Körper) und $f(x) \in R[x]$ unitär mit $\deg f(x) \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt:
   $$f(x) \text{ ist irreduzibel in } R[x] \iff f(x) \text{ hat keine Nullstelle in } R.$$
   Für $\deg f(x) \geq 4$ gilt nur noch $\Rightarrow$.

   (e) Ist $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ unitär mit einer Nullstelle $b \in \mathbb{Z}$, so ist b ein Teiler von a_0.

   (f) Sei R ein Integritätsring, $f \in R[x]$ und $\alpha \in R$ beliebig. Dann gilt: $f(x)$ ist irreduzibel in $R[x] \iff f(x + \alpha)$ ist irreduzibel in $R[x]$.

   Zeigen Sie, daß die folgenden 8 Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ sind. Sie dürfen die Aussagen in der Liste oben benutzen. Sie dürfen auch die Resultate von Aufgabe 2 benutzen.

$$\begin{aligned}
&x^3 + 10x^2 + 9x - 15,\\
&x^3 + 3x^2 - x - 1,\\
&x^3 + 12x^2 + 24x + 48,\\
&x^4 + x^3 + 16x + 17,\\
&3x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 5x + 15,\\
&7x^3 - 8x^2 + 17x - 135,\\
&x^6 + 17,\\
&x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 18.
\end{aligned}$$

Bitte wenden !!!

4. *(1+2+2 Punkte)* Für $m \in \mathbb{N}$ ist das m-te Kreisteilungspolynom $\Phi_m(x) \in \mathbb{C}[x]$ definiert durch

$$\Phi_m(x) := \prod_{a \text{ mit } 0<a<m, \mathrm{ggT}(a,m)=1} \left(x - e^{2\pi i \frac{a}{m}}\right).$$

(a) Zeigen Sie

$$x^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(x).$$

(b) Zeigen Sie $\Phi_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Sie dürfen folgende Aussage benutzen:

(Polynomdivision mit Rest) Ist R ein Integritätsring und sind $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ und ist $g(x)$ unitär, so gibt es eindeutige $q(x), r(x) \in R[x]$ mit $\deg r(x) < \deg g(x)$ und $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$.

(c) Es ist offenbar $\Phi_1(x) = x - 1$ und $\Phi_2(x) = x + 1$. Berechnen Sie $\Phi_m(x)$ für $m \in \{3, 4, 6, 12\}$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 21. Dezember 2005, vor der Vorlesung in A5.