Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(3 Punkte)* Führen Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus (Satz 7.10 der Vorlesung) mit den Zahlen $r_0 = 14372$ und $r_1 = 1236$ durch. Geben Sie das Ergebnis in einer Tabelle (wie in den Beispielen 7.6 und 7.7 der Vorlesung) an. Nur x_{n+1} und y_{n+1} brauchen Sie nicht zu berechnen.

   Hinweis: Es ist nützlich, $r_n = x_n \cdot r_0 + y_n \cdot r_1$ zur Kontrolle nachzurechnen.

2. *(3 Punkte)* Führen Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus mit den Polynomen $r_0 = x^4 + x^3 + x + 1$ und $r_1 = x^3 + x^2 - x \in \mathbb{Q}[x]$ durch. Geben Sie das Ergebnis in einer Tabelle (wie in den Beispielen 7.6 und 7.7 der Vorlesung) an. Nur x_{n+1} und y_{n+1} brauchen Sie nicht zu berechnen.

   Hinweise: Auch hier ist es ist nützlich, $r_n = x_n \cdot r_0 + y_n \cdot r_1$ zur Kontrolle nachzurechnen. Man kann (wie bei Aufgabe 1) alle Rechnungen nur mit Papier, Bleistift und Radiergummi durchführen. Nur die Kontrollrechnung zu $r_n = x_n \cdot r_0 + y_n \cdot r_1$ ist etwas mühsam.

3. *(2 Punkte)* Die Fibonacci-Zahlen $F_0, F_1, F_2, ...$ sind durch

$$F_0 := 0,\ F_1 := 1,\ F_{n+2} := F_{n+1} + F_n \quad \text{für } n \geq 0,$$

   definiert. Beweisen Sie die Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

   Hinweis: für einen ökonomischen Beweis ist es nützlich, die beiden Zahlen $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ anders zu benennen und eine Gleichung zu finden, die sie beide erfüllen.

4. *(2+1+1 Punkte)*

   (a) Aus dem erweiterten Euklidischen Algorithmus folgt, daß für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\exists\ c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \text{ggT}(a, b) = ca + db.$$

   Folgern Sie daraus

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{[a] \mid 0 < a < m, \text{ggT}(a, m) = 1\}.$$

   (b) Listen Sie in den beiden Fällen $m = 15$ und $m = 28$ jeweils die Elemente von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ und ihre Inversen auf (am besten in Tabellen mit den Inversen der Elemente unter den Elementen).

5. *(4 Punkte)* Zeigen Sie, daß der Ring $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ mit der Gradfunktion

$$w : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a + ib \mapsto |a + ib|^2 = a^2 + b^2,$$

   ein Euklidischer Ring ist.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 14. Dezember 2005, vor der Vorlesung in A5.