Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Dr. Christian Sevenheck

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(1+1+2 Punkte)* Im Ring $\mathbb{R}[x]$ ist die Menge $J := (x^3 + x) = \mathbb{R}[x] \cdot (x^3 + x)$ ein Ideal, und der Quotient $R := \mathbb{R}[x]/J$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
   (a) Geben Sie (mit Beweis) zwei Nullteiler im Ring R an.
   (Daher ist R kein Integritätsring und erst recht kein Körper.)
   (b) Geben Sie (ohne Beweis) eine Basis von R als $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Multiplikationstabelle für diese Basis an. Produkte von Basiselementen sollen natürlich als Linearkombinationen der Basiselemente geschrieben werden.
   (c) Nach Satz 6.12 (a) der Vorlesung hat man kanonische Bijektionen zwischen den Mengen
   $$\{\widetilde{I} \subset R \mid \widetilde{I} \text{ ist ein Ideal}\} \qquad \text{und} \qquad \{I \subset \mathbb{R}[x] \mid I \text{ ist ein Ideal und } J \subset I\}.$$
   Nach Satz 6.12 (d) der Vorlesung haben diese Mengen mehr als zwei Elemente. Finden Sie (mit Beweis) je vier Elemente in beiden Mengen.
   (Ohne Beweis: die beiden Mengen haben nur je vier Elemente.)

2. *(1+1+1+1 Punkte)*
   (a) Zeigen Sie: Ist R ein Integritätsring und sind $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$, so ist $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ und $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.
   (b) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Ringes R und zweier Polynome $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ an, so daß $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ und $\deg(f(x) \cdot g(x)) < \deg f(x) + \deg g(x)$ gilt.
   (c) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Ringes R und zweier Polynome $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ an, so daß $f(x) \cdot g(x) = 0$ gilt.
   (d) Geben Sie ein Beispiel eines nichtkommutativen Ringes R, zweier Polynome $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ und eines Elements $c \in R$ an, so daß $f(c) \cdot g(c) \neq (f \cdot g)(c)$ ist.
   (Dann ist die Einsetzungsabbildung $R[x] \to R, f(x) \mapsto f(c)$ *kein* Ringhomomorphismus.)

3. *(2+2 Punkte)*
   (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wieviele verschiedene Nullstellen hat das Polynom $n \cdot x$ in $(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})[x]$? Beweisen Sie Ihre Antwort. Sie dürfen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen benutzen.
   (b) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Ring R und ein unitäres (d.h. Leitkoeffizient = 1) Polynom in $R[x]$ vom Grad n mit 2^{n-1} verschiedenen Nullstellen.

4. *(4 Punkte)* Die folgende Aussage dürfen Sie in dieser Aufgabe ohne Beweis benutzen:

   (Polynomdivision mit Rest) Ist R ein Integritätsring und sind $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ und ist $g(x)$ unitär, so gibt es eindeutige $q(x), r(x) \in R[x]$ mit $\deg r(x) < \deg g(x)$ und $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$.

   Beweisen Sie mit Hilfe dieser Aussage und mit vollständiger Induktion den Satz:

   Sei R ein Integritätsring. Ein Polynom in $R[x]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen in R.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 7. Dezember 2005, vor der Vorlesung in A5.