Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Die Menge
$$G := \{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0, b \neq 0\} \subset GL(2, \mathbb{Q})$$
der invertierbaren oberen 2×2 Dreiecksmatrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$ ist bekanntermaßen eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{Q})$. Zeigen Sie
$$D^1 G = \{\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{Q}\}$$
und
$$D^2 G = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \{E_2\}.$$
(Daher ist G auflösbar.)

2. *(2+2 Punkte)*
   (a) Nach dem Satz von Schreier (in der Vorlesung 5.16 (a)) gibt es zu den beiden Normalreihen von $\mathbb{Z}$
   $$\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 20\mathbb{Z} \supset 140\mathbb{Z} \supset \{0\} \quad \text{und}$$
   $$\mathbb{Z} \supset 6\mathbb{Z} \supset 24\mathbb{Z} \supset \{0\}$$
   äquivalente Verfeinerungen. Geben Sie zwei äquivalente Verfeinerungen an und geben Sie (in beiden Fällen in der natürlichen Reihenfolge) die Isomorphieklassen der Quotientengruppen dieser Verfeinerungen an. Weitere Erläuterungen sind nicht nötig.

   (b) Zeigen Sie, daß $(\mathbb{Z}, +)$ keine Kompositionsreihe besitzt.

3. *(1+1+1+1 Punkte)* Die Menge $R := M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$ ist ein nichtkommutativer Ring und ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension 4.
   (a) Zeigen Sie: Ist $I \subset R$ ein Linksideal oder ein Rechtsideal und ist $I \cap GL(2, \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, so ist $I = R$.

   (b) Geben Sie $\mathbb{Q}$-Untervektorräume V_1, V_2 und V_3 von R mit den folgenden Eigenschaften an:
   $\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_3 = 2$.
   V_1 ist ein Unterring, aber weder Linksideal noch Rechtsideal.
   V_2 ist ein Linksideal, aber kein Rechtsideal.
   V_3 ist ein Rechtsideal, aber kein Linksideal.

4. *(4 Punkte)* Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, daß die Menge
$$R^* := \{a \in R \mid \exists\, b \in R \text{ mit } a \cdot b = 1\}$$
eine abelsche Gruppe ist. (Sie ist die *Einheitengruppe* von R.)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 30. November 2005, vor der Vorlesung in A5.