Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(1+2 Punkte)* (Eine Übung mt Anwendungen der Sylow-Sätze) Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 40 und jede Gruppe der Ordnung 30 einen nichttrivialen (d.h. $\neq \{e\}$ und $\neq G$) Normalteiler besitzt.

2. *(4 Punkte)* (Noch eine Übung mt Anwendungen der Sylow-Sätze) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung p^2q einen nichttrivialen Normalteiler besitzt.

3. *(2+1+1+2 Punkte)* (Ein eleganter Beweis, daß A_5 einfach ist)
   (a) Zeigen Sie, daß es in S_5 20 3-Zykel, 15 Elemente des Typs $(a_1a_2)(a_3a_4)$ (mit $|\{a_1, a_2, a_3, a_4\}| = 4$) und 24 5-Zykel gibt und daß diese zusammen mit id genau die Elemente von A_5 sind.
   (b) Nach Lemma 5.5 (c) der Vorlesung sind alle 3-Zykel in A_5 konjugiert. Zeigen Sie:
      i. Alle Elemente des Typs $(a_1a_2)(a_3a_4)$ sind in A_5 konjugiert.
      ii. Die 5-Zykel zerfallen in 2 Klassen von zueinander in A_5 konjugierten Elementen, die Klasse von (1 2 3 4 5) und die Klasse von (2 1 3 4 5). Beide Klassen haben je 12 Elemente. (Dieser Teil ist schwerer und mit einem Punkt eigentlich unterbewertet. Sie können (c) auch bearbeiten, ohne diesen Teil gelöst zu haben.)
   (c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b) und dem Satz von Lagrange, daß A_5 einfach ist.

4. *(3 Punkte)* Beweisen Sie folgenden Satz (=Lemma 5.10 (b) der Vorlesung):

   Sei G eine Gruppe, $H \lhd G$ ein Normalteiler, und seien H und G/H auflösbar. Dann ist auch G auflösbar.

   Hinweis: Der 2. Isomorphiesatz für Gruppen (Übung 4, Blatt 4) ist nützlich.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 23. November 2005, vor der Vorlesung in A5.