Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Dr. Christian Sevenheck

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(3+2 Punkte)*

   (a) Sei p eine Primzahl. Listen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_{2p} (Definition in Übung 3, Blatt 3) auf. Notieren Sie, welche zueinander konjugiert sind und welche Normalteiler sind. Im Falle eines Normalteilers geben Sie die Isomorphieklasse der Quotientengruppe an.

   (b) Die Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4 hatten Sie in Übung 4, Blatt 3, aufgelistet. Notieren Sie, welche zueinander konjugiert sind und welche Normalteiler sind. Im Falle eines Normalteilers geben Sie die Isomorphieklasse der Quotientengruppe an.

2. *(1+1+1 Punkte)*

   (a) Sei $U \subset G$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G mit $|G/U| = 2$. Ist U ein Normalteiler? Beweis oder Gegenbeispiel.

   (b) Sei $U \subset G$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G mit $|G/U| = 3$. Ist U ein Normalteiler? Beweis oder Gegenbeispiel.

   (c) A_4 und D_{12} sind nicht abelsche Gruppen der Ordnung 12. Zeigen Sie, daß sie nicht isomorph sind.

3. *(4 Punkte)* Betrachten Sie die folgende Bijektion von 8-elementigen Mengen,

$$\varphi : \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \to \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\pm 1 \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm i \mapsto \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \pm j \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm k \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   (Hier ist $i = \sqrt{-1}$, aber j und k sind neue Symbole.) Zeigen Sie, daß durch die Matrizenmultiplikation und durch φ eine Verknüpfung auf der ersten Menge definiert ist, mit der sie zu einer Gruppe wird. Geben Sie die Verknüpfungstafel an. Die Gruppe heißt *Quaternionengruppe*.

   Geben Sie alle Untergruppen der Quaternionengruppe an und zeigen Sie, daß alle Normalteiler sind. Geben Sie die Isomorphieklassen der Quotientengruppen an.

   Bemerkungen:

   (a) Dies ist eine Beispiel einer nicht abelschen Gruppe, deren Untergruppen alle Normalteiler sind.

   (b) Die Verknüpfung läßt sich $\mathbb{R}$-linear auf den 4-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{H} := \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot i + \mathbb{R} \cdot j + \mathbb{R} \cdot k$ mit Basis $1, i, j, k$ fortsetzen. $\mathbb{H}$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und ein *Schiefkörper*, der *Quaternionenschiefkörper*. Er enthält den Körper $\mathbb{C}$.

4. *(4 Punkte)* Beweisen Sie den folgenden sogenannten *2. Isomorphiesatz* für Gruppen:
   Sind H und K Normalteiler einer Gruppe G und ist $K \subset H$, so ist H/K Normalteiler von G/K, und es ist

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 16. November 2005, vor der Vorlesung in A5.