Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(1+2 Punkte)*
   (a) Die Permutation $\sigma \in S_n$ bestehe aus k Zykeln der Längen $l_1, ..., l_k$ mit paarweise disjunkten Trägern. Geben Sie Formeln für die Ordnung von σ und das Signum von σ an.
   (b) Schreiben Sie die Permutationen
   $$\alpha := (8\ 7\ 6\ 5\ 4)(3\ 2\ 1)(7\ 5\ 3\ 1) \text{ und } \beta := (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$$
   als Produkte von zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und berechnen Sie ihre Ordnungen und ihre Signa.

2. *(1+3 Punkte)* Definition: Zwei Elemente a und b einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls es ein Element $c \in G$ gibt mit $b = cac^{-1}$.
   (a) Zeigen Sie: ist $\rho = (a_1 a_2 ... a_l) \in S_n$ eine zyklische Permutation und ist $\sigma \in S_n$, so ist
   $$\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2)...\sigma(a_l)),$$
   insbesondere ist $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$ zyklisch und hat dieselbe Ordnung wie ρ.
   (b) $\alpha_1, ..., \alpha_k \in S_n$ seien zyklische Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und mit $o(\alpha_1) \geq o(\alpha_2) \geq ... \geq o(\alpha_k)$; ebenso seien $\beta_1, ..., \beta_l \in S_n$ zyklische Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und mit $o(\beta_1) \geq o(\beta_2) \geq ... \geq o(\beta_k)$; es sei
   $$\varphi := \alpha_1 \circ ... \circ \alpha_k \text{ und } \psi := \beta_1 \circ ... \circ \beta_l.$$
   Zeigen Sie: φ und ψ sind genau dann konjugiert, wenn $k = l$ und $o(\alpha_i) = o(\beta_i)$ für $i = 1, 2, ..., k$ ist.

3. *(1+2+2 Punkte)* Die *Diedergruppe* D_{2n} ist eine Gruppe mit $2n$ Elementen. Sie ist isomorph zu der Gruppe der Spiegelungen und Drehungen der Ebene $\mathbb{R}^2$, die das regelmäßige n-Eck mit Mittelpunkt 0 invariant lassen.
   (a) Machen Sie für $n = 3$ und $n = 4$ je eine Zeichnung, die ein regelmäßiges n-Eck und die Spiegelachsen enthält. (Mit diesen Zeichnungen sollen Sie sehen, daß die Gruppe D_{2n} eine zyklische Untergruppe von n Drehungen enthält und dass das Komplement aus n Spiegelungen besteht.)
   (b) Es ist $D_{2n} = \{d_0, d_1, ..., d_{n-1}, s_0, s_1, ..., s_{n-1}\}$, wobei d_l die Drehung um den Winkel $l \cdot 2\pi/n$ ist, s_0 irgendeine Spiegelung und s_k für $k \in \{1, ..., n-1\}$ die Spiegelung an der Spiegelachse mit Winkel $k \cdot \pi/n$ zur Spiegelachse von s_0. Geben Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe D_{2n} an.
   (c) Wieviele Konjugationsklassen von Spiegelungen gibt es in D_{2n}? (Vorsicht; prüfen Sie ihre Antwort an den Fällen $n = 3$ *und* $n = 4$.)

4. *(4 Punkte)* Listen Sie alle Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4 auf und begründen Sie Ihre Liste.

   Hinweise: Nützlich sind: eine Liste der Elemente von A_4 (Aufgabe 3 auf Blatt 2), der Satz von Lagrange (=4.3 (c)) und der Satz, dass jede Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist (=4.7 (b)). Die Diskussion der Untergruppen der Ordnung 6 ist am schwersten.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 9. November 2005, vor der Vorlesung in A5.