Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Dr. Christian Sevenheck

Blatt 2
26.10.2005

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Sei G eine Menge, $G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab$, eine assoziative Verknüpfung (multiplikativ geschrieben, ohne Verknüpfungssymbol), $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, eine Abbildung und $e \in G$ ein Element mit den Eigenschaften:

   (i) e ist eine *Linkseins*, d.h. $\forall\, a \in G \quad ea = a$,

   (ii) a^{-1} ist ein *Linksinverses* von a, d.h. $a^{-1}a = e$.

   Zeigen Sie:

   (a) a^{-1} erfüllt auch $aa^{-1} = e$ (ist also auch ein *Rechtsinverses*). Hinweis: Betrachten Sie $(a^{-1})^{-1}a^{-1}aa^{-1}$.

   (b) e erfüllt auch $ae = a$ (ist also auch eine *Rechtseins*).

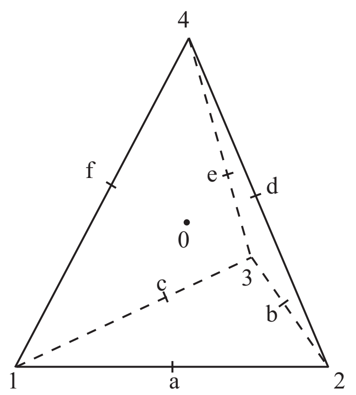
   Fazit: eine Menge G mit assoziativer Verknüpfung mit Linkseins und Linksinversen ist eine Gruppe.

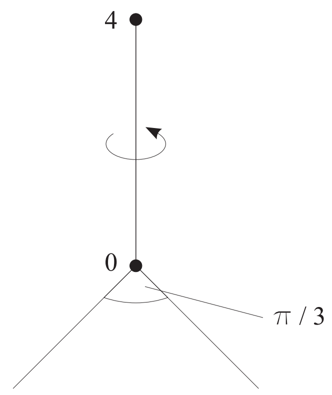
2. *(2+2 Punkte)*

   (a) Schreiben Sie die Permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$ und σ^{-1} und σ^{999} als Produkte von zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern.

   (b) Schreiben Sie die Permutationen $\psi = (1\ 3\ 5\ 7)(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$ und ψ^{-1} und ψ^{999} als Produkte von zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern.

3. *(4 Punkte)* T sei ein gleichseitiges Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0, Ecken $1, 2, 3, 4$ und Kantenmittelpunkten a, b, c, d, e, f wie in der Skizze links.





   Jede Drehung, die das Tetraeder in sich überführt, permutiert die Ecken und wird durch diese Permutation eindeutig bestimmt. So wird die Drehungsgruppe des Tetraeders isomorph auf eine Untergruppe der S_4 abgebildet (diese ist die *alternierende Gruppe* A_4).

   Machen Sie eine Liste aller Drehungen und der zugehörigen Elemente der A_4. Geben Sie darin die Permutationen als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern an. Charakterisieren Sie jede Drehung durch eine orientierte Drehachse und einen Drehwinkel (nur beim Drehwinkel π ist die Orientierung egal, und id ist die Drehung mit Winkel 0 um eine beliebige Achse). Zum Beispiel geben die Achse $\overline{04}$ und der Winkel $\frac{\pi}{3}$ die oben rechts skizzierte Drehung.

Bitte wenden !!!

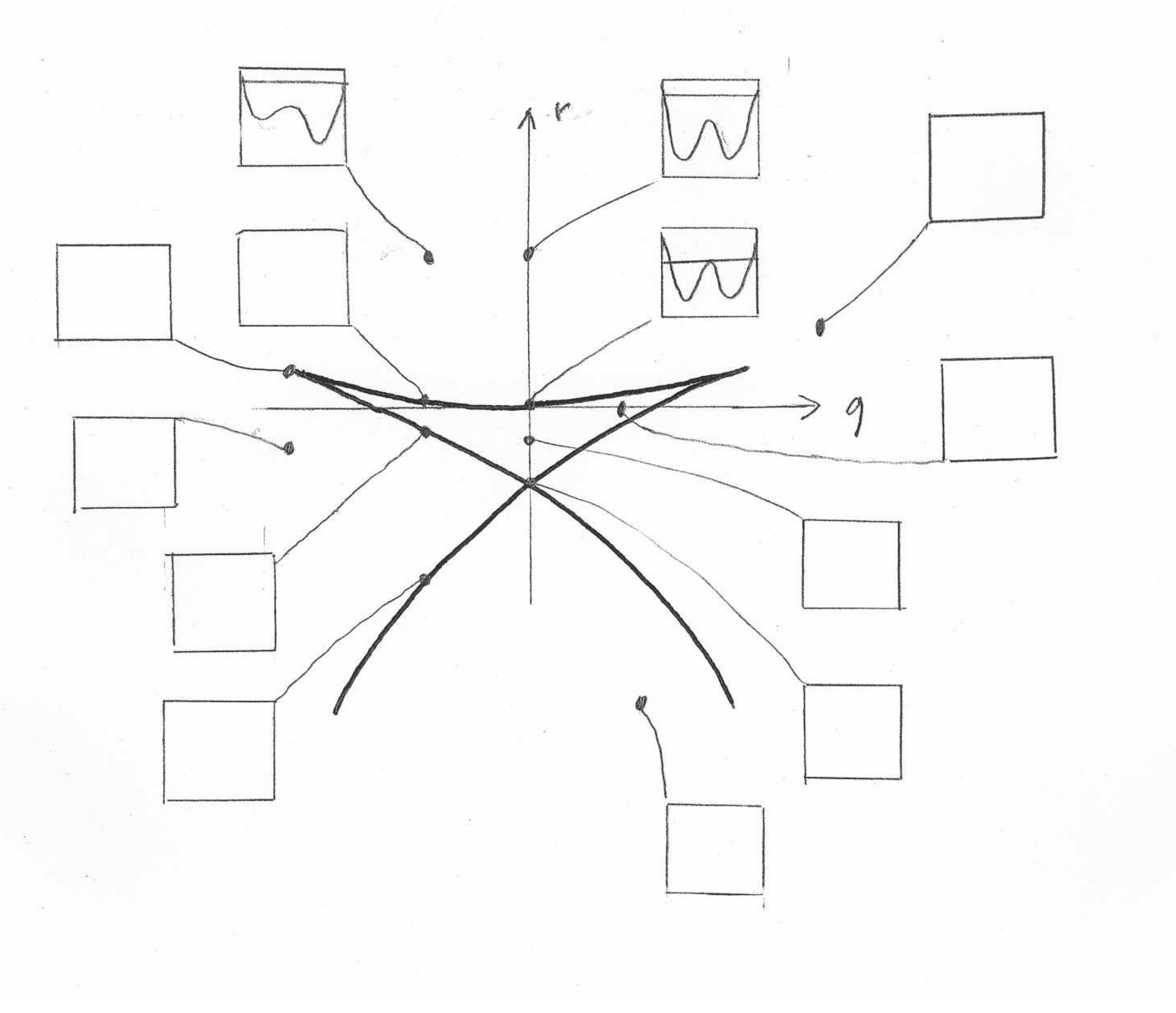
4. *(4 Punkte)* Wir betrachten die 2-Parameter-Familie von Polynomen

$$f_{q,r}(x) = x^4 - x^2 + qx - r$$

vom Grad 4 in x mit den beiden reellen Parametern q und r. Man kann ausrechnen, daß die Menge der Parameter $(q, r) \in \mathbb{R}^2$, für die $f_{q,r}(x)$ mehrfache Nullstellen hat, durch die Gleichung

$$4(1 - 12r)^3 - (-2 - 72r + 27q^2)^2 = 0$$

gegeben ist. Es ist eine Kurve mit zwei Spitzen und einem Selbstdurchdringungspunkt. Sie ist im folgenden Bild skizziert. In den drei ausgefüllten Kästchen ist jeweils ein Teil des Funktionsgraphen von $f_{q,r}(x)$ für (q, r) am bezeichneten Punkt zusammen mit der x-Achse skizziert. Füllen Sie die zehn leeren Kästchen aus. Die Skizzen müssen nur qualitativ stimmen. Eine Begründung ist nicht nötig.



Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 2. November 2005, vor der Vorlesung in A5.