Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)*

$$L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) \supset \mathbb{Q}$$

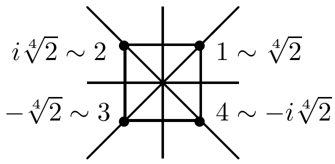
ist der Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ des Polynoms $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

Ohne Beweis: Der injektive Gruppenhomomorphismus $\pi : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \hookrightarrow S_4$ mit

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Perm}(\{\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2}\}) \xrightarrow{\cong} S_4$$

erfüllt

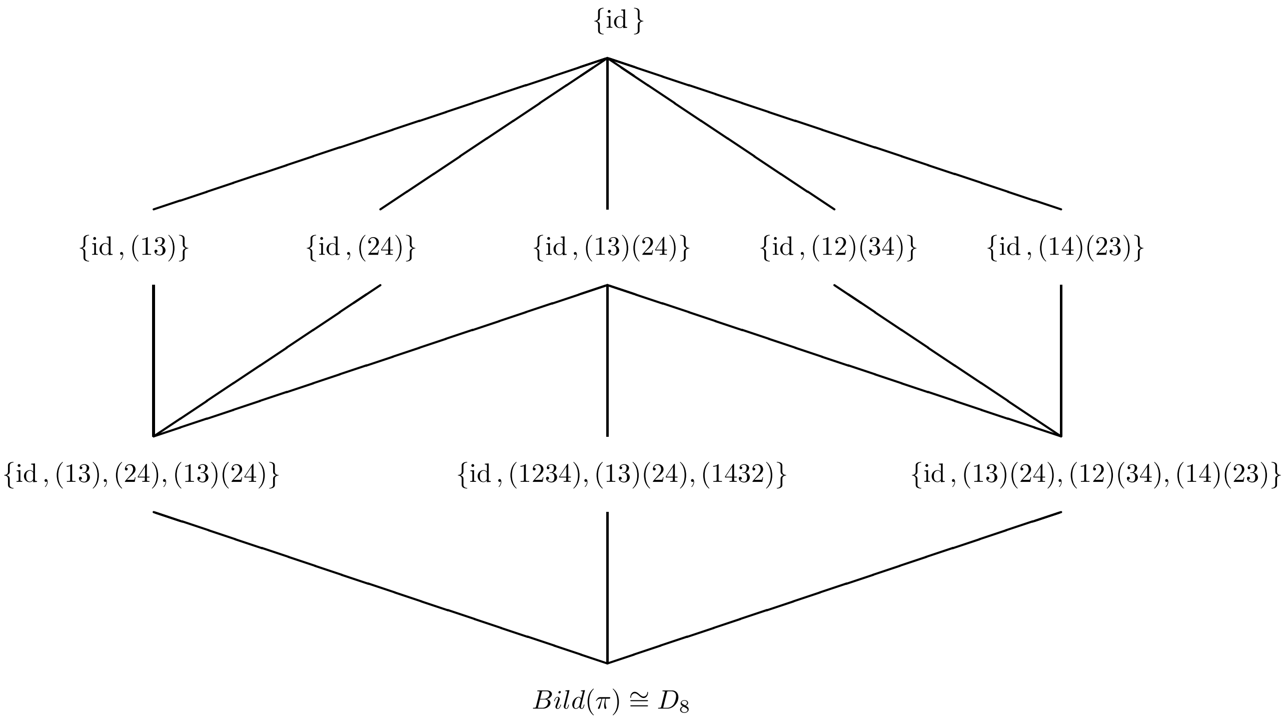
$$\begin{aligned} Bild(\pi) &= \{\mathrm{id}\,, (1\,3), (2\,4), (1\,2)(3\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2)\} \subset S_4 \\ &\cong \text{ Diedergruppe } D_8 \end{aligned}$$



Kopieren Sie das folgende Diagramm der Untergruppen von $Bild(\pi)$ und fügen Sie ein zweites Diagramm an, in welchem zu jeder Untergruppe $U \subset\ Bild(\pi)$ der entsprechende Körper

$$L^U := \{a \in L \mid \forall\ g \in U\ \ g(a) = a\} \subset L$$

steht. Erläuterungen sind nicht nötig.



Bitte wenden !!!

2. *(8 Punkte)* Die ersten 3 der folgenden 8 Körpererweiterungen $L_i \supset \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, ..., 8$, sind nicht Galoissch, die hinteren 5 sind Galoissch. Raten Sie die Galoisgruppen $\mathrm{Gal}\,(L_i/\mathbb{Q})$ für $i = 1, 2, ..., 7$ und $\mathrm{Gal}\,(L_8/\mathbb{F}_p)$. Sie müssen nur die Isomorphieklassen der Gruppen angeben und, wie Erzeugende der Gruppen auf Erzeugenden der Körpererweiterungen wirken. Begründungen sind nicht nötig.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbb{Q}(\sqrt[7]{3}) = L_1 & \supset & \mathbb{Q}, & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}}) = L_2 & \supset & \mathbb{Q}, & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{14}) = L_3 & \supset & \mathbb{Q}, & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = L_4 & \supset & \mathbb{Q}, & \\
\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = L_5 & \supset & \mathbb{Q} & \text{bei } \prod_{i=1}^{4}(x-\alpha_i) = x^4 - x + 1, \\
\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) = L_6 & \supset & \mathbb{Q} & \text{für ein } n \in \mathbb{N}, \\
\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}, \sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/5}) = L_7 & \supset & \mathbb{Q}, & \\
\mathbb{F}_{p^r} = L_8 & \supset & \mathbb{F}_p & \text{für eine Primzahl } p \text{ und } r \in \mathbb{N}.
\end{array}
$$

3. *(4 Punkte)* Nach Aufgabe 1 (b) von Blatt 1 sind bei $\xi := e^{2\pi i/7}$

$$\alpha_1 := \cos\frac{2\pi}{7} = \xi + \xi^{-1}, \quad \alpha_2 := \cos\frac{4\pi}{7} = \xi^2 + \xi^{-2} \quad \text{und} \quad \alpha_3 := \cos\frac{6\pi}{7} = \xi^3 + \xi^{-3}$$

die Nullstellen von $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbb{Q}(\alpha_1)$$

und

$$\mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}(\alpha_1)/\mathbb{Q}) \cong A_3.$$

Hinweis: Wegen Aufgabe 1 von Blatt 13 ist nur $\mathrm{Gal}\,(\mathbb{Q}(\alpha_1)/\mathbb{Q}) \cong A_3$ oder S_3 möglich. Man muß nur S_3 ausschließen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Montag, den 6. Februar 2006, vor der Vorlesung in A5.