Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(2+2 Punkte)* Sei K ein Körper, $L \supset K$ eine Körpererweiterung und

$$\mathrm{Gal}\,(L/K) := \{\psi : L \to L \mid L \text{ Körperautomorphismus von } L, \psi_K = \mathrm{id}\,\}.$$

Man sieht leicht, daß $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ eine Gruppe ist. Sie heißt *Galoisgruppe* von L über K.

(a) Sei $f(x) \in K[x]$ irreduzibel und sei $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ein Zerfällungskörper von $f(x)$ mit $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.
Zeigen Sie, daß die Einschränkung von $\psi \in \mathrm{Gal}\,(L/K)$ auf $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ eine Permutation der Nullstellen von f ist. Zeigen Sie, daß die Komposition

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathrm{Gal}\,(L/K) & \to & \mathrm{Perm}(\alpha_1, ..., \alpha_n) \stackrel{\cong}{\to} S_n \\ \psi & \mapsto & \psi|_{\{\alpha_1,...,\alpha_n\}} \end{array}$$

der Einschränkung auf $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ mit dem natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Perm}(\alpha_1, ..., \alpha_n) \stackrel{\cong}{\to} S_n$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Korollar 9.19 der Vorlesung sagt:

$$\forall\ i, j \in \{1, ..., n\} \quad \exists\ \psi \in \mathrm{Gal}\,(L/K) \text{ mit } \psi(\alpha_i) = \alpha_j.$$

Benutzen Sie es, um zu zeigen, daß die Untergruppe $\mathrm{Gal}\,(L/K(\alpha_1)) \subset \mathrm{Gal}\,(L/K)$ Index n in $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ hat. Hinweis: Linksnebenklassen.

Bemerkungen:

i. Aus (b) und (c) folgt: n teilt $|\mathrm{Gal}\,(L/K)|$, und $|\mathrm{Gal}\,(L/K)|$ teilt $n!$.
ii. Es gilt auch (Teil des Hauptsatzes der Galoistheorie): $|\mathrm{Gal}\,(L/K)| = [L : K]$.

2. *(1+1+2 Punkte)* (Rechenaufgabe) Finden Sie für die über $\mathbb{Q}$ algebraischen Zahlen

$$\alpha_1 := \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \beta_1 := \sqrt{3 + \sqrt{2}}, \quad \text{und} \quad \gamma_1 := 5^{1/3} + 5^{2/3}$$

Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ der Grade 4, 4 und 3, die je eine der Zahlen als Nullstellen haben. Sie dürfen die anderen Nullstellen raten und folgenden Satz benutzen. (Tatsächlich sind die gesuchten Polynome die Minimalpolynome, aber das müssen Sie nicht beweisen.)

Satz: Ist $L \supset \mathbb{Q}$ der Zerfällungskörper eines Polynoms $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ist $\delta_1 \in L$ und ist $\{\delta_1, ..., \delta_l\} \subset L$ die Menge der Bilder von δ_1 unter den Automorphismen von L in $\mathrm{Gal}\,(L/\mathbb{Q})$ (mit $\delta_i \neq \delta_j$ für $i \neq j$), so ist

$$f_{min,\delta_1}(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - \delta_i) \in \mathbb{Q}[x]$$

das Minimalpolynom von δ_1 über $\mathbb{Q}$.

3. *(1+3 Punkte)*

(a) Ist $K \supset \mathbb{Q}$ ein Körper und $\psi : K \to K$ ein Körperautomorphismus, so ist $\psi|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}$.

(b) Zeigen Sie $\mathrm{Aut}_{\text{Körper}}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}\,\}$.
Hinweis: Benutzen Sie (a) und die Aussage: $a < b \iff b - a > 0 \iff b - a$ ist ein Quadrat.

Bitte wenden !!!

4. *(4 Punkte)* Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Körper, n eine Primzahl und $f(x) \in K[x]$ irreduzibel mit $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$. Nach 9.21 (d) der Vorlesung sind alle Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ verschieden. Die Nullstellen seien so, daß gilt:

$$\alpha_3, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, \quad \text{also} \quad \overline{\alpha_1} = \alpha_2.$$

Zeigen Sie $\quad \mathrm{Gal}\,(K(\alpha_1, ..., \alpha_n)/K) \cong S_n$.

Hinweise:

(a) Benutzen Sie die Notationen und Aussagen von Aufgabe 1 und arbeiten Sie mit dem Bild $G := \pi(\mathrm{Gal}\,(K(\alpha_1, ..., \alpha_n)/K)) \subset S_n$.

(b) Die Tatsache, dass n prim ist, liefert gewisse Elemente von G.

(c) Die Einschränkung der komplexen Konjugation auf $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ gibt ein weiteres, welches?

(d) Um $G = S_n$ zu zeigen, muß man weitere Elemente von G konstruieren; da ist Aufgabe 2 von Blatt 3 nützlich.

(e) Bekanntermaßen wird S_n von Transpositionen erzeugt.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 1. Februar 2006, vor der Vorlesung in A5.