Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, sei $f(x) \in K[x]$ mit $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) \in \mathbb{C}[x]$, und sei $K(\alpha_1, ..., \alpha_n) \subset \mathbb{C}$ der Erweiterungskörper. Zeigen Sie:

   $$[K(\alpha_1, ..., \alpha_n) : K] \text{ teilt } n!.$$

   Hinweise: (i) Vollständige Induktion. (ii) Fallunterscheidung, ob $f(x)$ in $K[x]$ reduzibel oder irreduzibel ist. (iii) Bei $n = n_1 + ... + n_k$ mit $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ ist bekanntermaßen $\frac{n!}{n_1! \cdot ... \cdot n_k!} \in \mathbb{N}$.

2. *(4 Punkte)*
   Zeigen Sie $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

3. *(4 Punkte)* Raten Sie die Grade der folgenden 8 Körpererweiterungen.

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) &\supset \mathbb{Q}, \\
   \mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{2}}) &\supset \mathbb{Q}, \\
   \mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{2}} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}) &\supset \mathbb{Q}, \\
   \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) &\supset \mathbb{Q} \qquad \text{für ein } n \in \mathbb{N}, \\
   \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}, \sqrt[p]{2}) &\supset \mathbb{Q} \qquad \text{für eine Primzahl } p, \\
   \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{14}) &\supset \mathbb{Q}, \\
   \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &\supset \mathbb{Q} \qquad \text{bei } \prod_{i=1}^{3}(x - \alpha_i) = x^3 - 2x + 2, \\
   \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &\supset \mathbb{Q} \qquad \text{bei } \prod_{i=1}^{3}(x - \alpha_i) = x^4 - x + 1.
   \end{aligned}$$

   Sie müssen nur 8 Zahlen angeben, keine Begründungen. Im letzten Beispiel müssen Sie blind raten.

4. *(4 Punkte)*
   Laut Aufgabe 2 von Blatt 9 sind die beiden Polynome

   $$f_1(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$$

   irreduzibel in $\mathbb{F}_2[x]$. Daher sind die Quotientenringe

   $$K_1 := \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(f_1(x))} \quad \text{und} \quad K_2 := \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(f_2(x))}$$

   Körper. Weil sie $\mathbb{F}_2$-Vektorräume der Dimension 3 sind, haben sie beide 8 Elemente.
   Finden Sie einen Körperisomorphismus $\varphi : K_1 \to K_2$ und beweisen Sie, daß er einer ist.
   Am besten benennen Sie dafür die Klasse $[x]$ in K_1 mit α_1 und die Klasse $[x]$ in K_2 mit α_2.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 25. Januar 2006, vor der Vorlesung in A5.