Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(3+1 Punkte)*

   (a) Formen Sie mit elementaren Spalten- und Zeilenumformungen (mit ganzzahligen Koeffizienten) die folgenden Matrizen A_i, $i = 1, ..., 5$, mit Spalten der Längen $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ um in die Gestalt

   $$\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & \ddots & & \text{evtl } 0 \\ & & b_{n_i} & \end{pmatrix}$$

   mit $b_j | b_{j+1}$ (und evtl. $b_j = 0$ für große j).
   Mit anderen Worten: führen Sie den Elementarteileralgorithmus durch.

   $$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Die Elemente von $\mathbb{Z}^{n_i}$ werden als Spaltenvektoren geschrieben. Die Spalten der Matrix A_i erzeugen einen $\mathbb{Z}$-Untermodul $U_i \subset \mathbb{Z}^{n_i}$. Geben Sie einen zum Quotientenmodul $\mathbb{Z}^{n_i}/U_i$ isomorphen $\mathbb{Z}$-Modul an.

2. *(1+2 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie: *Gilt für eine Matrix A_i in Aufgabe 1* $\operatorname{rang} A_i =$ *(Anzahl der Spalten von A_i), so sind die Spalten von A_i eine $\mathbb{Z}$-Basis von U_i.*

   (b) Geben Sie für die Matrizen A_i in Aufgabe 1 mit $\operatorname{rang} A_i <$ (Anzahl der Spalten von A_i) eine $\mathbb{Z}$-Basis von U_i an.

3. *(3+2 Punkte)*

   Sei V ein n-dimensionaler $K-$Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. V ist ein $K[t]$-Modul mit

   $$p(t).v := p(f)(v) \quad \text{für } p(t) \in K[t],\ v \in V.$$

   Erinnerung:

   (α) Das Minimalpolynom $p_{min}(t)$ von f ist das unitäre Erzeugende des Ideals $\{p(t) \in K[t] \mid p(f) = 0\}$.

   (β) Satz von Cayley-Hamilton: *$p_{min}(t)$ teilt das charakteristische Polynom $p_{ch}(t)$ von f.*

   (a) Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) und (ii):

   (i) Es gibt ein unitäres Polynom $g(t) \in K[t]$ mit

   $$V \cong K[t]/(g(t)) \qquad \text{als } K[t]\text{-Modul.}$$

   (ii) Es gibt ein zyklisches Erzeugendes $v_1 \in V$ von V, d.h. $v_1 \in V$ erfüllt $V = \bigoplus_{i=1}^{n} K \cdot f^{i-1}(v_1)$.

   Und zeigen Sie, daß dann

   $$g(t) = p_{min}(t) = p_{ch}(t)$$

   ist.

   (b) Nun sei $K = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p_{ch}(t) = (t - \lambda)^n$, und (i) und (ii) sollen gelten. Geben Sie (mit Beweis) eine Basis von V an, so daß die Matrix von f zu dieser Basis ein einziger Jordanblock mit Eigenwert λ ist.

4. *(4 Punkte)* Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. $\mathbb{C}[t]$ ist ein Hauptidealring. Folgern Sie daraus, aus Aufgabe 3 und aus den beiden Sätzen unten, daß es eine Basis von V gibt, so daß die Matrix von f zu dieser Basis in Jordannormalform ist.

   Bemerkung: Diese Aussage kennen Sie natürlich aus der Linearen Algebra. Sie sollen hier einen neuen Beweis geben, der mehr Strukturtheorie benutzt, als man in Vorlesungen der Linearen Algebra zur Verfügung hat, nämlich die Struktur von Moduln über Hauptidealringen. Der Beweis ist elegant. Man kann ihn auch im Fall $K \neq \mathbb{C}$ anwenden und so eine Verallgemeinerung der Jordannormalform herleiten.

   1. Satz (Chinesischer Restsatz für Hauptidealringe): *Sei R ein Hauptidealring. Seien $a_1, ..., a_k \in R$ mit* $\mathrm{ggT}\,(a_i, a_j) = 1$ *für $i \neq j$. Dann ist*

      $$R/(a_1 \cdot ... \cdot a_k) \cong R/(a_1) \times ... \times R/(a_k)$$

      als Ringe und als R-Moduln.

   2. Satz (Struktur von Moduln über Hauptidealringen): *Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es ein eindeutiges $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und bis auf Assoziiertheit eindeutige Elemente $b_1, ..., b_k \in R - \{0\}$ mit $b_i \mid b_{i+1}$ und*

      $$M \cong R^l \times \mathrm{Tor(M)}, \quad \mathrm{Tor}(M) \cong R/(b_1) \times ... \times R/(b_k).$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 18. Januar 2006, vor der Vorlesung in A5.