Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(2+2 Punkte)*

   (a) Die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/10}$ erfüllt $0 = \zeta^5 + 1 = (\zeta+1)(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1)$, wegen $\zeta + 1 \neq 0$ also auch $0 = \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1$. Und natürlich ist $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{10}$.
   Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ ab, die von $2\cos\frac{2\pi}{10}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $2\cos\frac{2\pi}{10}$ aus.
   Bemerkungen: Wegen dieser Formel kann man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Zahl $2\cos\frac{2\pi}{10}$ heißt goldener Schnitt.

   (b) Finden Sie in ähnlicher Weise eine kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, die von $2\cos\frac{2\pi}{7}$ erfüllt wird. (Das ist alles. In dieser Teilaufgabe sollen Sie nicht weiterrechnen, etwa mit Cardano.)

2. *(2+0,5+1,5 Punkte)* Sei $\zeta := e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ die dritte Einheitswurzel mit Argument $\frac{2\pi}{3}$. Die Cardanischen Formeln drücken die Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ in

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + px + q \in \mathbb{C}[x]$$

   mit Hilfe von Wurzeln, rationalen Zahlen und den Zahlen $p, q \in \mathbb{C}$ aus:

$$\begin{aligned}
\text{Diskriminante}(p,q) &:= \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \\
u &:= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\text{Diskriminante}(p,q)}}, \\
v &:= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\text{Diskriminante}(p,q)}}, \\
x_0 &= u + v, \\
x_1 &= \zeta \cdot u + \zeta^2 \cdot v, \\
x_2 &= \zeta^2 \cdot u + \zeta \cdot v.
\end{aligned}$$

   Die Zahlen u und v erfüllen die Gleichungen $u \cdot v = -\frac{p}{3}$ und $u^3 + v^3 = -q$. Es ist $x_0 = u + v$ eine Lösung von $x^3 + px + q = 0$ wegen

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = -p(u+v) - q.$$

   (a) Vervollständigen Sie die folgende Rechnung:

$$\sqrt{\text{Diskriminante}(p,q)} = \frac{1}{2}(u^3 - v^3) = ... = -\frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \sqrt{-1} \cdot (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2).$$

   Dazu muß man u und v als Linearkombination der x_i schreiben. Hilfreich ist $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$.

   (b) Folgern Sie:

      i. Die Diskriminante verschwindet genau dann, wenn die Nullstellen nicht alle verschieden sind.

      ii. Sind die $p, q \in \mathbb{R}$ und alle x_i verschieden, so gilt:
      Diskriminante$(p,q) > 0 \iff$ eine Nullstelle ist reell, die anderen sind konjugiert komplex,
      Diskriminante$(p,q) < 0 \iff$ alle drei Nullstellen sind reell.

   Bemerkung: Im zweiten Fall hat man in den Cardanischen Formeln dritte Wurzeln von nicht reellen Zahlen, obwohl das Endergebnis reell ist. Manchmal kann man weiterrechnen, aber oft nicht. Dazu ein Satz (B.L. van der Waerden: Algebra I, Berlin 1971, §64):

   Sind die $p, q \in \mathbb{Q}$ und die $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ und alle verschieden, so gibt es für die x_i keine geschachtelten Wurzelausdrücke mit rationalen Radikanden, deren Zwischenwerte alle reell sind.

Bitte wenden !!!

3. *(2+3 Punkte)*

   (a) Berechnen Sie die Diskriminante zu $x^3 - 6x - 6 = 0$, folgern Sie mit Aufgabe 2 (b) ii, daß genau eine der drei Lösungen reell ist, und berechnen Sie diese Lösung mit den Cardanischen Formeln.

   (b) Die Gleichung $x^3 - 8x - 3 = 0$ hat drei reelle Lösungen, und eine von ihnen ist ganzzahlig. Geben Sie die Diskriminante an.

   Finden Sie einerseits die einfachsten möglichen Formeln für die drei Lösungen.

   Berechnen Sie andererseits die ganzzahlige Lösung mit Hilfe der Cardanischen Formeln und mit Hilfe der Rechnung $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}}\right)^3 = ...$

4. *(3 Punkte)* Rechnen Sie die Gleichung $y^3+y^2-2y-1 = 0$ mit $y = x-\frac{1}{3}$ um in eine Gleichung $x^3+px+q = 0$. Zeigen Sie, daß deren Diskriminante negativ ist. Nach Aufgabe 2 sind dann ihre Nullstellen alle verschieden und reell. Zeigen Sie, daß sie nicht rational sind. Daher ist der hinter Aufgabe 2 zitierte Satz anwendbar. Rechnen Sie trotzdem die Werte mit den Cardanischen Formeln soweit aus, wie es geht. Vergleichen Sie Aufgabe 1 (b).

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Skript etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Algebra05-06.html`

zu finden.

Abgabe bis Mittwoch, den 26. Oktober 2005, vor der Vorlesung in A5.