Blatt 3: Zweiseitige Märkte mit Matching-Mechanismus

Aufgabe 1. Das Roommate Problem: Einseitiger Matching Markt

Wir betrachten ein einseitiges Pendant zum Heiratsmarkt aus der Vorlesung. Sei A eine endliche nichtleere Menge. Sei $>_p$ für jedes $p \in A$ eine vollständige transitive strikte Ordnung auf A, kodiert durch eine Präferenzliste (Im Unterschied zum Heiratsmarkt ist $>_P$ hier auf ganz A definiert).

(a) Definiere in dieser Situation ein *Matching*. Definiere wann es *individuell rational* ist, wann es ein *blockierendes Paar* enthält und wann es *stabil* ist. Singles sind zugelassen.

(b) Betrachte folgendes Roommate Problem $(A, (>_p)_{p\in A})$ und zeige, das jedes Matching individuell rational, aber nicht stabil ist.

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d\} \\ P(a) &= (b, c, d, a) \\ P(b) &= (c, a, d, b) \\ P(c) &= (a, b, d, c) \\ P(d) &= (x, y, z, d)\,, \{x, y, z\} = \{a, b, c\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Gale-Shapley-Algorithmus

Betrachte Beispiel 3.4 aus der Vorlesung. Führe den Gale-Shapley-Algorithmus für die Frauen durch und bestimme so μ_W.

$$\begin{aligned} M &= (m_1, m_2, m_3) & W &= (w_1, w_2, w_3) \\ P(m_1) &= (w_2, w_1, w_3, m_1) & P(w_1) &= (m_1, m_3, m_2, w_1) \\ P(m_2) &= (w_1, w_3, w_2, m_2) & P(w_2) &= (m_3, m_1, m_2, w_2) \\ P(m_3) &= (w_1, w_2, w_3, m_3) & P(w_3) &= (m_1, m_3, m_2, w_3). \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Struktur in der Menge der stabilen Matchings

Betrachte den folgenden zweiseitigen Matching Markt:

$$\begin{aligned} M &= (m_1, m_2, m_3, m_4) & W &= (w_1, w_2, w_3, w_4) \\ P(m_1) &= (w_1, w_2, w_3, w_4, m_1) & P(w_1) &= (m_3, m_4, m_2, m_1, w_1) \\ P(m_2) &= (w_3, w_2, w_1, w_4, m_2) & P(w_2) &= (m_1, m_4, m_2, m_3, w_2) \\ P(m_3) &= (w_4, w_3, w_2, w_1, m_3) & P(w_3) &= (m_1, m_4, m_2, m_3, w_3) \\ P(m_4) &= (w_1, w_2, w_3, w_4, m_4) & P(w_4) &= (m_2, m_3, m_4, m_1, w_4) \end{aligned}$$

(a) Zeige dass die Matchings ν_M und ν_W stabil sind: $\nu_M : m_1 \mapsto w_2$, $m_2 \mapsto w_3$, $m_3 \mapsto w_4$, $m_4 \mapsto w_1$ und $\nu_W : m_1 \mapsto w_2$, $m_2 \mapsto w_4$, $m_3 \mapsto w_1$, $m_4 \mapsto w_3$.

(b) Berechne für (ν_M, ν_W) die Mengen aus dem Zerlegungslemma von Knuth (M^+, M_-, M^0). Bestimme dadurch $\nu_M \vee \nu_W$ und die Beziehung bezüglich der Relation $>_M$ dieser beiden Matchings.

(c) Bestimme mit dem Gale-Shapley-Algorithmus μ_W und μ_M.

(d) Betrachte das folgende *instabile* Matching. Bestimme die blockierenden Paare (es gibt nur einen Mann m_i der blockieren kann). Führe das Matching γ in ein Matching über indem du das für m_i beste blockierende Paar miteinander matchst und die vorherigen Partner zu Singles machst. Dann matche die Singles. Führe diesen Schritt noch einmal durch (es gibt jetzt nur ein blockierendes Paar).

$$\gamma = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 & w_3 \end{pmatrix}$$

(e) Betrachte ein beliebiges anderes stabiles Matching θ. Bringe die fünf Matchings $(\nu_M, \nu_W, \theta, \mu_M, \mu_W)$ in einen orientierten Graph (siehe Bemerkung 3.15) bezüglich $>_M$.

Das Übungsblatt wird in der Übung am 21.04.2016 besprochen.