Blatt 2: Das Sekretärinnenproblem

Aufgabe 1. Bestimme R und U_R in Problem 2.1

Sei $n \in \{4, 6, 8\}$.

(a) Bestimme für jeden dieser Werte die eindeutige Zahl $R \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=R}^{n-1} \frac{1}{j} < 1 \leq \sum_{j=R-1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Bestimme auch den Nutzen $U_R = \frac{R-1}{n} \cdot \sum_{j=R-1}^{n-1} \frac{1}{j}$.

(b) Sei $n = 6$. Wie groß ist V_3? Ist V_4 größer, kleiner oder gleich V_3?

Aufgabe 2. Erweiterung mit diskretem Nutzen

Betrachte das Sekretärinnenproblem in der Standardvariante (Problem 2.1 im Skript). Bisher wurden Ergebnisraum und Nutzen/Präferenzen auf diesem implizit angenommen. Sei nun ist der Ergebnisraum $E = \{1, ..., n\}$ wobei $1, ..., n$ das Ranking des zum Schluss behaltenen Guts ist. Der Nutzen bisher war $U(1) = 1, U(i) = 0 \forall i \neq 1$. Nun verteilen wir den Nutzen um: Sei $U(1) = u_1$ und $U(2) = u_2$ mit $u_1 + u_2 = 1$, $u_1 \geq u_2$ und $U(i) = 0, i \geq 3$.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit mit der Strategie σ_r das mt-beste Gut zu wählen ($m = 1$ ist das beste).

(b) Schreibe den erwarteten Nutzen $EU(\sigma_r)$ für $u_1 = 1, u_2 = -1$ auf.

(c) (Interpretation: Das ist ein *win/loose/draw marriage problem* nach Sakaguchi) Sei $EU(\sigma_r)$ wie in (b). Bestimme eine Approximation von $EU(\sigma_r)$ ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.4. (d). Zeichne den Graphen (dazu bietet es sich an, $x = r/n$ zu setzen) und lese die optimale Stoppzeit ab.

Aufgabe 3. Erweiterung von Bruss

Betrachte die Erweiterung des Sekretärinnenproblems von Bruss (Problem 2.7 im Skript). N ist unbekannt. Das Zeitintervall $[0, T]$ ist $[0, 9]$. Die Ankunftszeit jedes einzelnen Guts ist gegeben durch die Zufallsvariable X (für alle Güter gleich) mit der Dichte:

$$f : [0, 9] \to [0, 1]\,, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & x \in \bigcup_{i=0,2,4,6,8} [i, i+1) \cup \{9\} \\ 0 & x \in \bigcup_{i=1,3,5,7} [i, i+1) \end{cases}$$

(a) Skizziere den Graphen von f und der Verteilungsfunktion F auf $[0, 9]$.

(b) Welche Strategie ist optimal?

(c) Sei N nicht ganz unbekannt. Sei $P(N = 1) = \frac{1}{2}$ und $P(N = 2) = \frac{1}{2}$. Welche Strategie ρ_x ist jetzt optimal?

Das Übungsblatt wird in der Übung am 17.03.2016 besprochen.