Spieltheorie II

2-stündige Vorlesung im FSS 2016

Mannheim

Claus Hertling

30.11.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Faire Kuchenaufteilung

Wenn 2 hungrige Kinder einen Kuchen aufteilen wollen, ist der fairste Ansatz, dass ein Kind den Kuchen in 2 Stücke schneidet und das andere Kind dann ein Stück wählt. Das erste Kind wird, wenn es risikoavers ist, den Kuchen in 2 aus seiner Sicht gleichgute Stücke aufteilen. So kann es sich ein Stück sichern, das aus seiner Sicht $\frac{1}{2}$ des Kuchens ist. Das zweite Kind kann ein Stück mit einem (aus seiner Sicht) Wert $\geq \frac{1}{2}$ wählen. Wenn es Glück hat, hat das gewählte Stück aus seiner Sicht einen Wert $> \frac{1}{2}$. Also steht das zweite Kind potentiell besser da.
Hauptgegenstand dieses Kapitels sind Verallgemeinerungen dieses Algorithmus/Rezepts/Protokolls auf ≥ 3 Spieler und verschiedene Begriffe, was eine gute Aufteilung sein kann. Aber vorher kommen Erinnerungen an Begriffe der Maßtheorie und Existenzaussagen (die ohne Beweise).

Definition 1.1 (a) Sei K eine nichtleere Menge (der Kuchen). Eine *σ-Algebra* auf K ist eine Menge W von Teilmengen von K mit folgenden Eigenschaften:

(i) $K \in W$.

(ii) $A \in W \Rightarrow K - A \in W$.

(iii) $A_i \in W$ für $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in W$.

(b) Seien K eine nichtleere Menge und W eine σ-Algebra auf K. Ein *abzählbar additives Maß* auf W ist eine Funktion $\mu : W \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in W$.

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$.

(iii) Falls $A_i \in W, i \in \mathbb{N}$, lauter disjunkte Teilmengen von K sind, ist

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Weiter heißt ein solches μ *nicht-atomar*, falls es für jedes $A \in W$ mit $\mu(A) > 0$ ein $B \subset A$ mit $B \in W$ und $0 < \mu(B) < \mu(A)$ gibt.
Schließlich heißt ein solches μ *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(K) = 1$ ist.

(c) Eine *Partition* einer nichtleeren Menge K mit σ-Algebra W (kurz: eine Partition von (K, W)) ist ein Tupel $\mathcal{A} = (A_1, ..., A_m)$ (für ein $m \in \mathbb{N}$) von disjunkten Teilmengen von K, die alle in W liegen und $K = A_1 \cup ... \cup A_m$ erfüllen.

Definition 1.2 (a) Folgende Situation wird **Standardsituation** genannt: Gegeben sind eine nichtleere Menge K (der Kuchen), eine σ-Algebra W auf K, ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und n abzählbar additive nicht-atomare Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, ..., \mu_n$ auf W.

(b) In der Standardsituation wird eine Partition von (K, W) mit $m = n$ eine *Aufteilung* von K genannt.

(c) Eine mögliche und hier relevante Deutung: K ist ein Kuchen, der auf n Spieler aufgeteilt werden soll. Jeder der Spieler hat seine eigene Art, Teile des Kuchens einzuschätzen (der eine mag mehr Schokolade, der andere Fruchtstücke, der dritte ein trockeneres Teil). Die Einschätzung des Spielers i wird durch das Maß μ_i von (K, W) gegeben.

Die folgenden beiden Sätze werden hier nur zitiert. Der erste ist der Spezialfall $m = 2$ des zweiten Satzes.

Theorem 1.3 *(Satz von Lyapounov, 1940) In der Standardsituation (und auch im Fall $n = 1$) ist die Menge*

$$\{(\mu_1(A), ..., \mu_n(A)) \,|\, A \in W\} \subset [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$$

abgeschlossen (äquivalent: kompakt) und konvex im $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1.4 *(Dvoretsky, Wald und Wolfowitz, 1951) In der Standardsituation (und auch im Fall $n = 1$) und für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ist die Menge*

$$\begin{aligned}\{(\mu_i(A_j))_{i=1,...,n;j=1,...,m} \,|\, (A_1, ..., A_m) &\text{ ist eine Partition von } (K, W) \\ &\subset M(n \times m, [0, 1]) \subset M(n \times m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \cdot m}\end{aligned}$$

abgeschlossen (äquivalent: kompakt) und konvex in $M(n \times m, \mathbb{R})$.

Korollar 1.5 *(Satz von Neyman, 1946 (d.h. älter als Theorem 1.4)) In der Standardsituation gibt es für ein beliebiges Tupel $(p_1, ..., p_n) \in [0, 1]^n$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ von K mit $\mu_i(A_j) = p_j$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$.*

Beweis: (mit Theorem 1.4.) Sei

$$G := \{(\mu_i(A_j))_{i,j=1,...,n} \,|\, (A_1, ..., A_n) \text{ ist eine Aufteilung von } K.\}$$

G ist nach Theorem 1.4 konvex. Die Matrix M_j zur Aufteilung $(\emptyset, ..., \emptyset, K, \emptyset, ..., \emptyset)$ von K, die an der j-ten Stelle K stehen hat, hat in der j-ten Spalte nur Einsen und ansonsten nur Nullen. Und sie ist in G enthalten. Weil G konvex ist, ist

$$\sum_{j=1}^n p_j M_j \in G,$$

und es gibt eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} p_j M_j = (\mu_i(A_j))_{i,j=1,...,n}.$$

Eine solche Aufteilung war gesucht. □

Der Satz von Neyman sagt, dass es eine Aufteilung des Kuchens K gibt, bei der alle n Spieler jedes einzelne Kuchenstück gleich bewerten, d.h. alle bewerten das j-te Kuchenstück mit dem Wert p_j. Im Fall $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ ist das nicht so schlecht. Keiner kann auf irgendeinen anderen neidisch sein. Aber 2 Vorbehalte:

(1) Diese Aufteilung ist eine reine Existenzaussage. Der Mensch oder die Maschine, die sie ausführt, muß alle Einschätzungen μ_i kennen. Und er muß die Existenzaussage konstruktiv machen.

(2) Wenn die Einschätzungen hinreichend verschieden sind, ist eine Aufteilung denkbar, bei der alle gewinnen, wo also jeder sein Lieblingsstück bekommt und alle nach ihrer Einschätzung mehr als einen Anteil von $\frac{1}{n}$ des Kuchens bekommen.

Definition 1.6 (a) In der Standardsituation heißt eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ von K *proportional*, falls für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$\mu_i(A_i) \geq \frac{1}{n}.$$

(b) Sie heißt *neidfrei*, falls für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$ gilt:

$$\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j).$$

(c) Sie heißt *effizient* oder *Pareto-optimal*, falls es keine *bessere* Aufteilung gibt. Eine Aufteilung $(B_1, ..., B_n)$ heißt *besser* als die Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$, falls $\mu_i(B_i) \geq \mu_i(A_i)$ für alle i und $\mu_i(B_i) > \mu_i(A_i)$ für mindestens ein i gilt.

Lemma 1.7 *In der Standardsituation ist jede neidfreie Aufteilung von K auch proportional. Die Umkehrung gilt im Fall $n = 2$, aber nicht bei $n \geq 3$.*

Beweis: Übung. □

Wieder gibt es eine starke Existenzaussage, den folgenden Satz.

Theorem 1.8 *(Weller 1985 (?), Barbanel 2005) In der Standardsituation gibt es eine Aufteilung von K, die neidfrei und Pareto-optimal ist.*

Mehr kann man sich fast nicht wünschen. Aber nur fast: Leider ist dies eine reine Existenzaussage. Der Vorbehalt (1) oben ist auch hier gültig.
Es bleibt das Problem, welche und wie gute Aufteilungen man unter geeigneten Prämissen konstruktiv erreichen kann. Das folgende Lemma gibt mögliche Aktionen einzelner Spieler.

Lemma 1.9 *(a) In der Standardsituation sei $A \subset K$ in W mit $\mu_i(A) > 0$ für einen Spieler i, und r sei eine Zahl in $]0, \mu_i(A)[$. Dann gibt es eine Menge $B \subset A$ mit $B \in W$ und $\mu_i(B) = r$.*
Deutung: Der Spieler i kann ein Kuchenstück $A \subset K$ in zwei beliebig große Stücke schneiden.

(b) Unter den gleichen Voraussetzungen wie in (a) gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Aufteilung von A in Mengen $(B_1, ..., B_k)$ mit $B_j \in W$ und $\mu_i(B_j) = \frac{\mu_i(A)}{k}$.
Deutung: Der Spieler i kann ein Kuchenstück $A \subset K$ in beliebig viele aus seiner Sicht gleich große Kuchenstücke schneiden.

(c) Sind $A_1, A_2 \in W$ zwei Teilmengen von A mit $\mu_i(A_1) > \mu_i(A_2)$, so gibt es ein $B \subset A_1$ mit $B \in W$ und $\mu_i(B) = \mu_i(A_2)$.
Deutung: Der Spieler i kann das Kuchenstück A_1 auf die Größe des Kuchenstücks A_2 trimmen, *d.h. er kann von A_1 so viel abschneiden, dass der Rest aus seiner Sicht gleich groß wie A_2 ist.*

Beweis: (b) und (c) folgen direkt aus (a).
(a) Die Einschränkung von W auf A ist eine σ-Algebra auf A. Die Funktion $\mu_i/\mu_i(A)$ auf $(A, W|_A)$ ist ein abzählbar additives nicht-atomares Wahrscheinlichkeitsmaß auf A. Die konvexe und abgeschlossene Menge in Theorem 1.3 ist

$$\{\mu_i(B)/\mu_i(A) \mid B \subset A, B \in W\}.$$

Sie enthält 0 (von $B = \emptyset$) und 1 (von $B = A$), also ist sie das Intervall $[0, 1]$. Daher gibt es ein $B \subset A$ mit $B \in W$ und $\mu_i(B) = r$. □

Nun werden die Prämissen formuliert, die beim konstruktiven Weg zu einer Aufteilung erfüllt sein sollen.

Definition 1.10 Es werden die Standardsituation und die Deutung oben mit n Spielern angesetzt. Das heißt, K ist ein Kuchen, der auf die n Spieler aufgeteilt werden soll. Weiter werden folgende **Standard-Prämissen** vorausgesetzt:

(A) Jeder Spieler will ein aus seiner Sicht (d.h. in seinem Maß μ_i) möglichst großes Stück des Kuchens erhalten.

(B) Fall (α): Jeder Spieler ist mit einem Anteil von $\frac{1}{n}$ des Kuchens zufrieden. Er interessiert sich nicht für die Stücke der anderen. Das wird durch eine proportionale Aufteilung gelöst.

Fall (β): Jeder Spieler möchte ein Kuchenstück, das aus seiner Sicht mindestens so groß ist wie irgendein anderes Stück. Ansonsten interessieren ihn die Stücke der anderen nicht. Das wird durch eine neidfreie Aufteilung gelöst.

(C) Jeder Spieler ist völlig risikoavers. Wenn er die Wahl zwischen einer Entscheidung hat, die seinen Wunsch in (B) erfüllt, und einer Entscheidung, die wahrscheinlich ein besseres Stück liefert, aber eventuell auch ein Stück, das seinen Wunsch in (B) nicht erfüllt, dann wird er die erste Entscheidung wählen.

(D) Jeder Spieler kennt nur sein eigenes Maß μ_i. Es gibt keinen Spielleiter oder Computer, der alle Maße kennt.

(E) Jeder Spieler kann (nur?) die Aktionen im Lemma 1.9 ausführen.

Nun wird ein Algorithmus gesucht, mit dem eine Aufteilung gefunden werden kann, der unter den Standard-Prämissen funktioniert und die Wünsche in den Standard-Prämissen erfüllt. Im folgenden wird statt Algorithmus der Begriff *Protokoll* gebraucht.

Definition 1.11 In der Standardsituation mit der Deutung mit n Spielern ist ein **Protokoll** eine Folge von Schritten, so dass in jedem Schritt einer der Spieler eine Wahl oder eine Teil-Aufteilung vornehmen muss und so dass folgendes gilt:

(i) Unter den Standard-Prämissen wird eine proportionale (im Fall (B) (α)) bzw. neidfreie (im Fall (B) (β)) Aufteilung erreicht.

(ii) Falls einer oder mehrere Spieler nicht völlig risikoavers handeln, so hat kein anderer Spieler einen Schaden dadurch (d.h. sein Wunsch in (B) wird immer noch erreicht), höchstens sie selber (sie können natürlich auch Glück haben).

Diese Definition ist (immer noch) nicht ganz präzis. Die Beispiele unten werden zeigen, was mit der Folge von Schritten gemeint ist.

Das Rezept bei 2 Kindern *(einer schneidet, der andere wählt)* ist ein proportionales und neidfreies Protokoll für $n = 2$ (im Sinne von Definition 1.11). Es ist uralt, mindestens über zweieinhalb tausend Jahre alt: Hesiod beschreibt in seiner Theogonie, wie Prometheus Fleisch in 2 Haufen aufteilt und Zeus dann einen von ihnen wählt.
Aber die Entwicklung von Protokollen für $n \geq 3$ begann erst 1944 mit Überlegungen von Hugo Steinhaus. Er suchte und fand ein proportionales Protokoll für $n = 3$. Seine Freunde Stefan Banach und Bronislav Knaster fanden kurz darauf ein (anderes) proportionales Protokoll für alle $n \geq 3$.

1967 erweiterte Harold Kuhn, ein Spieltheoretiker, das Protokoll von Steinhaus zu einem proportionalen Protokoll für alle $n \geq 3$.
Aber inzwischen hatten unabhängig voneinander John Selfridge und John H. Conway Anfang der 60er Jahre ein neidfreies Protokoll für $n = 3$ gefunden. Es kommt in bis zu 5 Schritten zu einer neidfreien Aufteilung. Auch die proportionalen Protokolle kommen in einer jeweils festen endlichen Zahl von Schritten zu einer proportionalen Aufteilung.
1992 fanden Steven Brams und Alan Taylor ein neidfreies Protokoll für alle $n \geq 4$. Andere neidfreie Protokolle für $n \geq 4$ wurden 1997 von Jack Robertson und William Webb und 2000 von Oleg Pikhurko gefunden. Die neidfreien Protokolle für $n \geq 4$ haben aber alle das Manko, dass sie zwar in endlich vielen Schritten zu einer neidfreien Aufteilung führen, aber dass die Anzahl dieser Schritte von den Maßen $\mu_1, ..., \mu_n$ abhängt und beliebig groß sein kann.

Offenes Problem: Gibt es ein neidfreies Protokoll für $n \geq 4$ (oder gern erstmal für $n = 4$), das in einer festen endlichen Anzahl von Schritten zu einer neidfreien Aufteilung kommt?

Alle Protokolle für $n \geq 3$ sind viel komplexer als das Protokoll *(einer schneidet, der andere wählt)* im Fall $n = 2$. Die neidfreien Protokolle für $n \geq 4$ sind so komplex, dass sie eigentlich keinen praktischen Nutzen mehr haben. Aber die Protokolle sind alle interessant. Es macht Spaß, sich mit ihnen auseinanderzusetzen. Im folgenden werden sie beschrieben. Dabei wird unterschieden, welcher Teil der Handlung in jedem Schritt dem handelnden Spieler vorgeschrieben werden kann, und welcher Strategie er in diesem Schritt folgt (also wie er die Handlung ausführen soll), wenn er tatsächlich völlig risikoavers ist.

Protokoll 1.12 (Proportionales Protokoll von Steinhaus (1944) für $n = 3$ in der Version von Kuhn (1967))

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 3 Teile. Strategie: Er sollte sie aus seiner Sicht gleich groß wählen.

2. Schritt: Spieler 2 kann aussetzen, oder er kann 2 Stücke als schlecht markieren. Strategie: Er sollte 2 Stücke als schlecht markieren, falls aus seiner Sicht 2 Stücke jeweils kleiner als $\frac{1}{3}$ sind. Sonst sollte er aussetzen.

3. Schritt: Falls Spieler 2 ausgesetzt hat, nimmt Spieler 3 ein Stück, danach Spieler 2, danach Spieler 1 (= Schritte 4 und 5), mit den offensichtlichen Strategien, dann ist man fertig. Ab jetzt betrachten wir nur noch den anderen Fall.

   Im anderen Fall hat Spieler 2 zwei Stücke als schlecht markiert. Nun kann Spieler 3 auch 2 Stücke als schlecht markieren, oder Spieler 3 kann aussetzen. Strategie: Wie im 2. Schritt (die Markierungen von Spieler 2 sind für Spieler 3 egal).

4. Schritt: Falls Spieler 3 ausgesetzt hat, nehmen die Spieler in der Reihenfolge 2, 3, 1 Stücke, mit den offensichtlichen Strategien, dann ist man fertig.

   Falls Spieler 3 nicht ausgesetzt hat, bekommt Spieler 1 das eine oder eines der beiden Stücke, die Spieler 2 und Spieler 3 als schlecht markiert hatten.

5. Schritt: Die beiden anderen Stücke werden zusammengelegt. Nun spielen die Spieler 2 und 3 das Spiel *(einer schneidet, der andere wählt)*. Dann ist man fertig.

Behauptung: Das ist ein proportionales Protokoll.

Beweis: Übung □

Protokoll 1.13 (Proportionales Protokoll von Banach und Knaster (194?) für $n \geq 2$)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet vom Kuchen ein Teil ab. Strategie: Er sollte ein Teil abschneiden, das aus seiner Sicht Größe $\frac{1}{n}$ hat.

2. Schritt: Spieler 2 bekommt das Stück und kann es direkt weiterreichen oder etwas abschneiden und das Reststück weiterreichen. Das abgeschnittene Teil wird zum Kuchen zurückgelegt. Strategie: Falls das Reststück aus seiner Sicht nur eine Größe $\leq \frac{1}{n}$ hat, soll er es direkt weiterreichen. Falls es eine Größe $> \frac{1}{n}$ hat, soll er ein Teil abschneiden, so dass der Rest Größe $\frac{1}{n}$ hat.

...

n. Schritt: Spieler n bekommt das Reststück und kann es direkt auf einen Tisch legen oder etwas abschneiden und das neue Reststück auf einen Tisch legen. Das abgeschnitte Teil wird zum Kuchen zurückgelegt. Strategie: Wie im 2. Schritt bei Spieler 2.

(n+1). Schritt: Falls mindestens einer der Spieler 2 bis n etwas abgeschnitten hat, bekommt der letzte Spieler, der etwas abgeschnitten hat, das Stück auf dem Tisch. Falls keiner etwas abgeschnitten hat, bekommt Spieler 1 das Stück auf dem Tisch.

Weitere Schritte: Der restliche Kuchen (mit allen abgeschnittenen Teilen) wird nun mit der gleichen Procedur auf die $n - 1$ Spieler verteilt, die das Stück auf dem Tisch nicht bekommen hatten.

Behauptung: Das ist ein proportionales Protokoll.

Beweis: Übung □

Bemerkungen 1.14 (i) Schon im Fall $n = 2$ unterscheidet sich dieses Protokoll vom Protokoll *(einer schneidet, der andere wählt)*. Hier schneidet Spieler 1 und bietet Spieler 2 ein Stück an. Falls das aus Sicht von Spieler 2 von der Größe $\leq \frac{1}{2}$ ist, legt er es auf den Tisch und bekommt das andere. Falls es aus seiner Sicht $> \frac{1}{2}$ ist, schneidet er von ihm ein ε (sehr nahe an Null) ab und bekommt das Reststück.
(ii) Man kann das Protokoll von Banach und Knaster etwas abändern: Im n. Schritt bekommt Spieler n das Reststück und muß gar nichts abschneiden, sondern hat die Wahl, es zu nehmen oder auf den Tisch zu legen. Der (n+1). Schritt wird entsprechend modifiziert. Das abgeänderte Protokoll ist auch proportional. Und der Spieler n wird, wenn er das Stück haben will, nicht gezwungen, ein infinitesimal kleines Stückchen abzuschneiden, nur um das Stück zu erhalten. Im Fall $n = 2$ reduziert sich das Protokoll dann auf das klassische Protokoll *(einer schneidet, der andere wählt)*.

Das nächste proportionale Protokoll ist besonders elegant und einfach, denn man kann es für n Spieler durchführen und dann auf $n+1$ Spieler erweitern. Das ist sogar der Kern des Protokolls: Man startet mit irgendeiner proportionalen Aufteilung für n Spieler. Das Protokoll sagt, wie man daraus eine proportionale Aufteilung für $n + 1$ Spieler macht.

Protokoll 1.15 (Proportionales Protokoll von Arlington M. Fink (1964) für $n \geq 2$)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 2 Teile. Strategie: Sie sollten aus seiner Sicht gleich groß sein.

2. Schritt: Spieler 2 wählt ein Stück aus. Strategie: Er sollte ein aus seiner Sicht größtes Stück wählen.

3. Schritt: Spieler 1 und 2 schneiden ihr Stück jeweils in 3 Teile. Strategie: Sie sollten es jeweils in 3 aus ihrer Sicht gleich große Teile schneiden.

   Spieler 3 wählt von jedem der beiden Spieler 1 und 2 je 1 der 3 Teile und bekommt dieses Teil. Strategie: Er sollte ein aus seiner Sicht größtes Teil wählen.

   ...

Vor dem n. Schritt: Es liegt eine proportionale Aufteilung des ganzen Kuchens auf die Spieler 1,..., $n - 1$ vor.

n. Schritt: Jeder der Spieler 1 bis $n-1$ schneidet sein Stück jeweils in n Teile. Strategie: Jeder sollte sein Stück in n gleich große Teile schneiden.

Spieler n wählt von jedem der Spieler 1 bis $n - 1$ je 1 der n Teile und bekommt dieses Teil. Strategie: Er sollte ein aus seiner Sicht größtes Teil wählen.

Behauptung: Für jedes $k \geq 2$ hat man am Ende des k-ten Schritts eine proportionale Aufteilung der Kuchens auf die Spieler 1 bis k.

Beweis: Übung □

Im Nachhinein sind das Protokoll von Banach und Knaster und erst recht das Protokoll von Fink eleganter und einfacher als das Protokoll von Steinhaus. Proportionale Protokolle sind elegant und leicht ausführbar.
Aber neidfreie Protokolle sind viel schwieriger. Das folgende Protokoll für $n = 3$ ist immerhin noch elegant und überschaubar.

Protokoll 1.16 (Neidfreies Protokoll von Selfridge und Conway (Anfang 1960er) für $n = 3$)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 3 Stücke. Strategie: Er sollte ihn in 3 aus seiner Sicht gleich große Stücke schneiden.

2. Schritt: Spieler 2 schneidet eventuell von einem Stück etwas ab oder macht nichts. Falls er etwas abschneidet, wird der Rest beiseitegelegt. Strategie: Er sollte das aus seiner Sicht größte Stück auf die Größe des aus seiner Sicht zweitgrößten Stücks trimmen.

3. Schritt: Spieler 3 und 2 und 1 nehmen in dieser Reihenfolge eines der 3 Stücke, unter folgender Regel für Spieler 2: Falls er im Schritt 2 ein Stück beschnitten hatte, muß er es nehmen, falls nicht Spieler 3 es direkt vor ihm schon genommen hatte. Strategien: Natürlich nimmt Spieler 3 ein aus seiner Sicht größtes Stück der 3 Stücke, und danach nimmt Spieler 2 ein aus seiner Sicht größtes der verbleibenden 2 Stücke, sofern er die Wahl hat und die Regel oben nicht greift.

   1. Fall: Spieler 2 hatte kein Stück beschnitten. Dann ist alles verteilt und das Protokoll stoppt.

   2. Fall: Spieler 2 hatte ein Stück beschnitten. Dann hat Spieler 3 oder Spieler 2 das beschnittene Stück genommen. Der Spieler von den Spielern 2 und 3, der das beschnittene Stück genommen hat, wird nun *Nichtschneider* genannt, der andere der Spieler 2 und 3 wird *Schneider* genannt. Spieler 1 hat in jedem Fall ein unbeschnittenes Stück genommen. Aus seiner Sicht hat er einen *uneinholbaren Vorteil* gegenüber dem Nichtschneider, denn aus seiner Sicht ist sein Stück um den beiseitegelegten Rest größer als das beschnittene Stück, das ja der Nichtschneider bekommen hat.

4. Schritt: (Nur noch im 2. Fall, sonst ist das Protokoll schon fertig.) Der Schneider schneidet den Rest in 3 Teile. Strategie: Er sollte den Rest in 3 gleich große Teile schneiden.

5. Schritt: Die Spieler nehmen in der Reihenfolge Nichtschneider - Spieler 1 - Schneider je 1 der 3 Teile. Strategien: Die Spieler Nichtschneider und Spieler 1 wählen jeweils ein aus ihrer Sicht größtes Teil.

Behauptung: Das ist ein neidfreies Protokoll.

Beweis: Details Übung. Nach dem 3. Schritt ist der Hauptteil des Kuchens verteilt, und zwar neidfrei, und darüber hinaus mit dem uneinholbaren Vorteil des Spielers 1 vor einem der Spieler 2 und 3, nämlich dem Spieler *Nichtschneider*. Daher ist für Spieler 1 egal, einen wie großen Anteil vom Rest der Nichtschneider bekommt. Daher funktioniert im 5. Schritt die Aufteilung mit Wahlen in der Reihenfolge Nichtschneider - Spieler 1 - Schneider. □

Dieses Protokoll enthält 2 wichtige Ideen, die auch beim neidfreien Protokoll von Brams und Taylor (1992) für $n \geq 4$ eingesetzt werden. Eine ist, dass ein Spieler Stücke trimmen kann, so dass danach mehrere Stücke aus seiner Sicht gleich groß und am größten sind. Die andere ist, einen uneinholbaren Vorteil für einen Spieler gegenüber einem anderen Spieler bezüglich eines noch zu verteilenden Restes zu erreichen.
Die erste Idee wird im nächsten Protokoll 1.17 für eine neidfreie Aufteilung eines Teils des Kuchens genutzt. Die zweite Idee wird im Protokoll 1.18 realisiert, allerdings auf ziemlich komplizierte Weise.

Protokoll 1.17 (Protokoll einer neidfreien teilweisen Aufteilung im Fall $n \geq 3$ von Taylor (1992?), aber hier erstmals für beliebiges n (nicht nur $n = 4$) ausgeführt)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in $2^{n-2} + 1$ Stücke. Strategie: Er sollte den Kuchen in aus seiner Sicht gleich große Stücke schneiden.

2. Schritt: Spieler 2 trimmt 0 bis 2^{n-3} Stücke. Die ganzen Reste werden beiseitegelegt. Strategie: Er soll erreichen, dass es auf jeden Fall $2^{n-3}+1$ aus seiner Sicht gleich große und größte Stücke unter den $2^{n-2} + 1$ Stücken gibt.

...

k. Schritt für $k \in \{2, ..., n-1\}$: Spieler k trimmt 0 bis 2^{n-1-k} Stücke. Strategie: Er soll erreichen, dass es auf jeden Fall $2^{n-1-k} + 1$ aus seiner Sicht gleich große und größte Stücke unter den $2^{n-2} + 1$ Stücken gibt. Die ganzen Reste werden beiseitegelegt.

...

(n-1). Schritt: Spieler $n-1$ trimmt 0 bis 1 Stück. Strategie: Er soll erreichen, dass es auf jeden Fall 2 aus seiner Sicht gleich große und größte Stücke unter den $2^{n-2}+1$ Stücken gibt. Die ganzen Reste werden beiseitegelegt.

n. Schritt: Die Spieler nehmen nun in der Reihenfolge $n, n-1, n-2, ..., 2, 1$ je eines der $2^{n-2}+1$ Stücke. Die Spieler n und 1 sind frei in ihrer Wahl. Jeder der Spieler $n-1, n-2, ..., 2$ muss dagegen folgende Regel beachten: Falls ein Stück verfügbar ist, das er getrimmt hat und das nicht weiter getrimmt worden ist, muss er so ein Stück nehmen. Falls kein solches Stück verfügbar ist, ist er frei in seiner Wahl.

Strategie: Die Spieler n und 1 wählen einfach ein für sie größtes Stück. Jeder der Spieler $n-1$ bis 2 wählt unter den von ihm getrimmten Stücken und nicht weiter getrimmten Stücken irgendeines, falls solche Stücke verfügbar sind, und ansonsten irgendein aus seiner Sicht größtes.

Behauptung: (a) Das ist ein neidfreies Protokoll für eine Aufteilung von einem Teil des Kuchens. Der Teil des Kuchens hat aus Sicht des Spielers 1 eine Größe $\geq \frac{1}{2^{n-2}+1}$.
(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{2^{n-2}}{2^{n-2}+1}\right)^N < \varepsilon$$

gibt die N-fache Wiederholung dieses Protokolls eine neidfreie Aufteilung des Kuchens bis auf einen Rest, der aus Sicht des Spielers 1 eine Größe $< \varepsilon$ hat.

Beweis: (b) folgt sofort aus (a).
(a) Für den Spieler n ist die resultierende Aufteilung sicher neidfrei. Bei jedem Spieler $k \in \{n-1, n-2, ..., 2\}$ muss gezeigt werden, dass mindestens eines der $\geq 2^{n-1-k}+1$ Stücke, die er nach seinem Trimmen als gleich große und größte im Blick hatte, weder weiter kleiner getrimmt worden ist noch von einem anderen Spieler gewählt worden ist.
Induktionsannahme: Die Spieler n bis $k+1$ haben höchstens 2^{n-1-k} Stücke durch Trimmen oder Wegnehmen für den Spieler k unmöglich gemacht.
Induktionsschritt von $k+1$ nach k: Dann ist noch mindestens eines der $\geq 2^{n-1-k}+1$ Stücke, die Spieler k nach seinem Trimmen als gleich große und größte im Blick hatte, weder weiter getrimmt worden noch von einem anderen Spieler gewählt worden. Falls sich darunter ein von ihm getrimmtes befindet, nimmt er so eins, falls nicht, nimmt er irgendeins dieser Stücke. Damit ist die Aufteilung für ihn neidfrei.
Falls Spieler k weniger als 2^{n-1-k} Stücke getrimmt hatte, hat er insgesamt höchstens 2^{n-1-k} Stücke für die später wählenden Spieler unmöglich gemacht. Mit der Induktionsannahme erhält man höchstens $2^{n-1-(k-1)}$ Stücke, die für die später wählenden Spieler unmöglich sind. Das beweist in diesem Fall die Induktionsbehauptung.

Falls Spieler k die maximale Zahl 2^{n-1-k} Stücke getrimmt hat, aber eins dieser Stücke wählt, gilt das gleiche.
Falls Spieler k die maximale Zahl 2^{n-1-k} Stücke getrimmt hat und ein ungetrimmtes Stück wählen darf und wählt, dann nur, weil die von ihm getrimmten Stücke genau die für ihn durch weiteres Trimmen oder Wegnehmen unmöglichen Stücke sind. In dem Fall erhält man insgesamt $2^{n-1-k}+1 \leq 2^{n-1-(k-1)}$ Stücke, die für die später wählenden Spieler unmöglich sind. Das beweist auch in diesem Fall die Induktionsbehauptung.
Dieser Induktionsbeweis ist bis zum Spieler $k = 1$ gültig. Damit ist bewiesen, dass die Aufteilung neidfrei ist.
Da der Spieler 1 aus seiner Sicht ein Stück der Größe $\geq \frac{1}{2^{n-2}+1}$ erhalten hat, ist aus Sicht des Spielers 1 ein Teil des Kuchens der Größe $\geq \frac{1}{2^{n-2}+1}$ verteilt worden. □

Protokoll 1.18 (Protokoll einer neidfreien teilweisen Aufteilung von Taylor (1992?) für $n = 4$ mit Vorteil für einen Spieler)
Behauptung: (a) Sei eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ des Kuchens auf n Spieler gegeben, die $\mu_2(A_2) < \mu_2(A_1)$ und $\mu_1(A_2) \geq \mu_1(A_1)$ erfüllt. Dann gibt es eine neidfreie teilweise Aufteilung $(B_1, ..., B_n)$ mit $\mu_2(B_2) > \mu_2(B_1)$, d.h. Spieler 2 sieht einen Vorteil für sich gegenüber Spieler 1.
(b) Das folgende Protokoll realisiert (a) im Fall $n = 4$.

Beweis: (a) Schwere Übung. (b) Nach dem Protokoll. □

1. Schritt: Alle $n = 4$ Spieler werden gebeten, die Stücke in eine Rangfolge nach Größe zu bringen und auch gleiche Größe von Stücken anzuzeigen. Es wird angenommen, daß Spieler 2 und Spieler 1 $\mu_2(A_1) > \mu_2(A_2)$ und $\mu_1(A_2) \geq \mu_2(A_1)$ sagen. Dann muss Spieler 2 danach eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ nennen.

   Strategie: Alle Spieler sollten die wahre Rangfolge nennen. Spieler 2 sollte $p \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass gilt:

$$\mu_2(A_1) > \frac{p+4}{p-2} \cdot \mu_2(A_2).$$

2. Schritt: Spieler 1 teilt die Stücke A_2 und A_1 in je p Stücke. Strategie: Er sollte die p Stücke von A_2 und die p Stücke von A_1 je gleich groß wählen.

3. Schritt: Spieler 2 wählt 3 Stücke von A_2 aus, die nun s_1, s_2, s_3 genannt werden. Und entweder wählt er 3 Stücke von A_1 aus und trimmt bis zu 2 von ihnen. Dann werden die 3 Stücke t_1, t_2, t_3 genannt. Oder er schneidet eines der p Stücke von A_1 weiter in 3 Stücke, die nun t_1, t_2, t_3 genannt werden.

Strategie: Er sollte die aus seiner Sicht kleinsten 3 Stücke von A_2 auswählen. Und er sollte die aus seiner Sicht größten Stücke von A_1 wählen, falls das kleinste dieser 3 Stücke echt größer als das größte der Stücke s_1, s_2, s_3 ist. Dann sollte er bis zu 2 von ihnen trimmen, so daß die Stücke nach dem Trimmen für ihn gleich groß sind. Andernfalls sollte er das größte der p Stücke von A_1 auswählen und in 3 aus seiner Sicht gleich große Stücke teilen.

4. Schritt: Spieler 3 trimmt eines der 6 Stücke $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ und legt den Rest beiseite, oder er tut nichts. Strategie: Er soll erreichen, dass es aus seiner Sicht mindestens 2 gleich große und größte Stücke gibt. Falls die beiden aus seiner Sicht größten Stücke verschieden groß sind, trimmt er das größte auf die Größe des zweitgrößten.

5. Schritt: Die Spieler wählen in der Reihenfolge 4, 3, 2 und 1 je eins der 6 Stücke $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$. Spieler 3 muss das getrimmte Stück nehmen, falls er eins getrimmt hat und falls Spieler 4 es nicht schon genommen hat. Spieler 2 muß eines der Stücke t_1, t_2, t_3 nehmen. Spieler 1 muß eines der Stücke s_1, s_2, s_3 nehmen.

Beweis von (b): Die p Stücke von A_1 im 2. Schritt werden $b_1, ..., b_p$ mit $\mu_2(b_1) \geq \mu_2(b_2) \geq ... \geq \mu_2(b_p)$ genannt. Es folge Spieler 2 im 3. Schritt der Strategie. Dann gilt

$$0 \leq \mu_2(s_1) \leq \mu_2(s_2) \leq \mu_2(s_3) \leq \frac{\mu_2(A_2)}{p-2}$$

und

$$\text{entweder } \mu_2(b_3) > \mu_2(s_3) \text{ oder } \mu_2(b_3) \leq \mu_2(s_3).$$

Im ersten Fall wählt er die Stücke b_1, b_2, b_3 und trimmt bis zu 2 von ihnen. Nach dem Trimmen werden die 3 dann für ihn gleich großen Stücke t_1, t_2, t_3 genannt. Im zweiten Fall teilt er b_1 in 3 aus seiner Sicht gleich große Stücke t_1, t_2, t_3. Im zweiten Fall gibt die Wahl von p alle folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \mu_2(A_1) &> \frac{p+4}{p-2} \cdot \mu_2(A_2) \\ \Rightarrow \mu_2(b_1) + \mu_2(b_2) + (p-2)\frac{\mu_2(A_2)}{p-2} \geq \mu_2(A_1) &> (1 + \frac{6}{p-2}) \cdot \mu_2(A_2) \\ \Rightarrow 2\mu_2(b_1) &> \frac{6}{p-2} \cdot \mu_2(A_2) \geq 6\mu_2(s_3) \\ \Rightarrow \mu_2(t_1) = \mu_2(t_2) = \mu_2(t_3) = \frac{\mu_2(b_1)}{3} &> \mu_2(s_3). \end{aligned}$$

Also gilt in beiden Fällen

$$\mu_2(t_1) = \mu_2(t_2) = \mu_2(t_3) > \mu_2(s_3) \geq \mu_2(s_2) \geq \mu_2(s_1).$$

Wenn Spieler 1 der Strategie im 2. Schritt gefolgt ist, gilt außerdem

$$\mu_1(t_1) \leq \mu_1(s_3),\ \mu_1(t_2) \leq \mu_1(s_3),\ \mu_1(t_3) \leq \mu_1(s_3) = \mu_1(s_2) = \mu_1(s_1).$$

Spieler 4 wählt zuerst und ist neidfrei. Wegen des 4. Schritts ist auch Spieler 3 nach seiner Wahl neidfrei. Es bleiben sicher mindestens ein ungetrimmtes t-Stück und ein ungetrimmtes s-Stück übrig. Daher sind auch Spieler 2 und Spieler 1 nach ihren Wahlen im 5. Schritt neidfrei. □

Protokoll 1.19 (Neidfreies Protokoll von Brams und Taylor (1992) für $n \geq 4$)

1. Schritt: Spieler 1 teilt den Kuchen in n Stücke und bietet jedem der anderen Spieler ein Stück an. Strategie: Er sollte die Stücke gleich groß wählen.

2. Schritt: Falls alle Spieler 2 bis n zufrieden sind, ist das Protokoll beendet. Ab nun wird der Fall betrachtet, dass nicht alle zufrieden sind. OBdA sei Spieler 2 unzufrieden. Er hält sein Stück für kleiner als das Stück für Spieler j. Dann tauscht Spieler 1 mit Spieler j die Stücke, falls $j \neq 1$ ist.

   Nun ist man in der Situation des Protokolls 1.18 (a). Durchführung des Protokolls liefert eine neidfreie teilweise Aufteilung, bei der Spieler 2 eine Vorteil für sich gegenüber Spieler 1 sieht.

3. Schritt: Spieler 2 nennt eine Zahl N, und das Protokoll 1.17 wird N mal durchgeführt.

   Strategie: Die Zahl N sollte so groß sein, dass

$$r \cdot \left(\frac{2^{n-2}}{2^{n-2}+1} \right)^N < \delta$$

   ist. Hier ist $r < 1$ die Größe des noch nicht verteilten Teils des Kuchens aus Sicht von Spieler 2, und $\delta > 0$ der Vorteil, den Spieler 2 für sich gegenüber Spieler 1 sieht. Dann sieht Spieler 2 nach dem 3. Schritt einen uneinholbaren Vorteil für sich vor Spieler 1. Spieler 2 wäre nicht einmal neidisch auf Spieler 1, wenn Spieler 1 den ganzen Rest des Kuchens bekommen würde.

4. Schritt: Spieler 1 teilt den Kuchen in $n!$ Teile. Jeder der anderen Spieler nennt sich einen *Zustimmer* oder einen *Ablehner*. Spieler 1 wird *Zustimmer* genannt. Strategie: Ein Spieler, der die $n!$ Teile für gleich groß hält, sollte sich Zustimmer nennen. Einer, der sie nicht für gleich groß hält, sollte sich Ablehner nennen.

5. Schritt: Es wird ein Paar (*Ablehner, Zustimmer*) gewählt, für das der Ablehner keinen uneinholbaren Vorteil für sich gegenüber dem Zustimmer sieht. Das Paar übernimmt die Rolle des Paars (Spieler 2, Spieler 1) und geht durch die Schritte 1 bis 4. Dabei stellt der Ablehner die $n!$ Stücke so zu n Stücken aus je $(n-1)!$ Stücken zusammen, daß er die n Stücke nicht alle für gleich groß hält.

6. Schritt: Der 5. Schritt wird so oft wiederholt, bis es irgendwann im 4. Schritt kein Paar (Ablehner, Zustimmer) mehr gibt, bei dem der Ablehner keinen uneinholbaren Vorteil für sich gegenüber dem Zustimmer sieht. Dann werden die $n!$ Stücke gleichmäßig auf die Zustimmer verteilt.

Behauptung: Das ist ein neidfreies Protokoll für $n \geq 4$ Spieler.

Beweis: Übung. □

Bemerkungen 1.20 (i) Die Größen δ und N im 3. Schritt von Protokoll 1.19 hängen von den Maßen μ_1 und μ_2 und der Aufteilung im 1. Schritt ab. Man kann diese Größen nicht a priori abschätzen. δ kann beliebig klein sein, und N kann beliebig groß sein. Daher hat man keine Schranke für die Anzahl der Schritte in diesem Protokoll.

(ii) Die neidfreien Protokolle von Robertson & Webb (1997) und von Pikhurko (2000) für $n \geq 4$ habe ich nicht angesehen. Sie könnten eleganter sein. Aber sie haben auch keine obere Schranke für die Anzahl der Schritte.

(iii) Das Protokoll 1.17 gibt eine neidfreie Aufteilung eines Teils des Kuchens, und durch Wiederholung kann man so den Kuchen bis auf ein $\varepsilon > 0$ neidfrei in einer bekannten Anzahl von Schritten aufteilen. Eine solche Aufteilung heißt *fast neidfrei*.
Es gibt eine interessante andere Arbeit von F.E. Su (1999), die auf andere und effiziente und elegante Weise eine *fast neidfreie Aufteilung* herstellt.

(iv) Theorem 1.8 sagt, dass neidfreie und *effiziente* (Definition 1.6 (c)) Aufteilungen existieren. Aber es ist wohl unmöglich, solche Aufteilungen mit Protokollen herzustellen. Schon das Protokoll für $n = 2$ *(einer schneidet, der andere wählt)* liefert eine zwar neidfreie, aber nicht notwendig effiziente Aufteilung.

(v) Es gibt auch Algorithmen, die nicht mit einer diskreten Menge von Schritten und Messerschnitten arbeiten, sondern mit einem bewegten Messer. Im Protokoll 1.21 wird der einfachste vorgestellt. Brams und Taylor und Koautoren haben auch dazu Arbeiten. Aber die größere Freiheit zahlt sich nicht wirklich aus. Und es ist schwerer präzisierbar, welche Arten von Schritten man erlauben will.

Aus meiner Sicht sind die Protokolle oben (mit diskreten Messerschnitten) auch als Algorithmen mit bewegtem Messer zulässig. Diese Sicht paßt aber nicht zur Behauptung von Brams und Taylor, dass die Existenz eines Algorithmus, der für $n \geq 5$ mit bewegtem Messer eine neidfreie Aufteilung gibt, ein offenes Problem ist.

Protokoll 1.21 (Proportionale Aufteilung mit einem bewegten Messer von Dubins und Spanier (1961))
Ein Messer fährt langsam von links nach rechts über einen Kastenkuchen. Der erste der n Spieler, der ruft, bekommt den Teil des Kuchens, der in diesem Moment links vom Messer ist.
Der Spieler ist raus, und der Rest des Kuchens wird auf gleiche Weise auf die anderen $n-1$ Spieler verteilt.

Behauptung: Das gibt eine proportionale Aufteilung.

Beweis: Übung. □

Hier sind 3 Bücher und 4 Originalarbeiten zur fairen Kuchenaufteilung. [BT96] und [RW98] behandeln Protokolle. [Ba05] behandelt Existenzsätze. Weitere Originalarbeiten zu den Protokollen und Existenzsätzen werden in den Büchern zitiert.

Literatur

[Ba05] J.B. Barbanel: The geometry of efficient fair division. Cambridge University Press, 2005.

[BT95] S.J. Brams, A.D. Taylor: An envy-free cake division protocol. American Mathematical Monthly **102.1** (1995), 9–18.

[BT96] S.J. Brams, A.D. Taylor: Fair division. From cake-cutting to dispute resolution. Cambridge University Press, 1996.

[Pi00] O. Pikhurko: On envy-free cake division. American Mathematical Monthly **107.8** (2000), 736–738.

[RW97] J. Robertson, W. Webb: Near exact and envy-free cake division. Ars Combinatoria **45** (1997), 97–108.

[RW98] J. Robertson, W. Webb: Cake-cutting algorithms. Be fair if you can. A K Peters, Natick, Massachusetts, 1998.

[Su99] F.E. Su: Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. American Mathematical Monthly **106** (1999), 930–942..

2 Das Sekretärinnenproblem

Das Sekretärinnenproblem ist seit den 50er Jahren bekannt. Seitdem sind viele Varianten studiert worden. Die ursprüngliche Fassung ist folgende.

Problem 2.1 Das *Sekretärinnenproblem* ist folgendes Optimierungsproblem. Gegeben sind n Güter, die einem Spieler in beliebiger Reihenfolge präsentiert werden. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist bekannt. Alle $n!$ Reihenfolgen sind gleich wahrscheinlich. Die Präsentation des r-ten Guts ist der r-te Schritt.
Die Güter habe alle unterschiedlichen Wert für den Spieler. Sobald ihm das r-te Gut präsentiert wird, kennt er das Ranking unter den ersten r Gütern, aber er weiß nichts über das Ranking der weiteren $n - r$ Güter.
Er muß nach einem Schritt das zuletzt präsentierte Gut wählen. Dann endet das Spiel. Er hat gewonnen, wenn das gewählte Gut das beste aller n Güter ist. Sonst hat er verloren. Mit welcher Strategie kann er die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen maximieren? Wie hoch ist sie dann ungefähr? Der Spieler ist risikoneutral.

Martin Gardner hat das Problem im Februar 1960 im Scientific American vorgestellt und es Fox und Marnie zugeschrieben. Eine Lösung ist im März 1960 im Scientific American skizziert und Moser und Pounder zugeschrieben. Aber schon in den 50er Jahren wurde es in Seminaren und auf Konferenzen von einigen Leuten diskutiert. Die erste in einer Zeitschrift veröffentlichte Lösung hat Lindley 1961 gegeben. Sie wird unten beschrieben. Eine andere Lösung mit Hilfe von Markov-Ketten hat Dynkin 1963 gegeben. Unten kommt eine Bemerkung zu ihr.
Seit den 70er Jahren sind sehr viele Erweiterungen des Problems studiert worden. Eine Erweiterung von F.T. Bruss (1984) wird nach der Lösung des Problems 2.1 behandelt werden.
Man kann das Problem 2.1 als ein Problem in Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie auffassen, aber auch als ein spieltheoretisches Problem. In jedem Fall muss und kann man elegante Ansätze wählen und kommt nur dann gut durch. Im folgenden werden zwei verwandte Ansätze vorgestellt.

Definition 2.2 Die Strategie σ_r, $r \in \{1, ..., n\}$, ist die Strategie des Spielers, die ersten $r - 1$ Güter nicht zu nehmen, und ab dem r-ten Schritt das erste Gut zu nehmen, das besser als die ersten $r - 1$ Güter ist. U_r bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Strategie zu gewinnen.

Lemma 2.3

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{n}, \\ U_r &= \frac{r-1}{n} \cdot \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j-1} \qquad \text{falls } r \geq 2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Beweis: Die Wahrscheinlichkeit, dass das j-te Gut das beste ist, ist $\frac{1}{n}$. Für $j = 1$ gibt das $U_1 = \frac{1}{n}$. Im folgenden steht P immer für Wahrscheinlichkeit (=**P**robability). Für $r \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}
U_r &= \sum_{j=r}^{n} P(\text{mit } \sigma_r \text{ wird das } j\text{-te Gut gewählt und es ist das beste}) \\
&= \sum_{j=r}^{n} P(\text{das } j\text{-te Gut ist das beste}) \cdot P(\text{das beste der Güter } 1, ..., j-1 \\
&\qquad\qquad\qquad \text{befindet sich unter den Gütern } 1, ..., r-1) \\
&= \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r-1}{j-1} \\
&= \frac{r-1}{n} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j-1}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Die Werte U_r lassen sich für kleines n leicht ausrechnen. Für großes n kann man das r mit maximalem U_r leicht abschätzen. Aber das wird hier nicht getan, denn der folgende zweite Ansatz gibt einen noch eleganteren und reicheren Zugang zur Lösung und zu Abschätzungen für großes n. Er ist wohl von Lindley (1961).

Der Spieler kann sich im r-ten Schritt noch offenhalten, welche der Strategien σ_j mit $j \geq r$ er spielen will. Dann ist seine Wahrscheinlichkeit zu gewinnen

$$V_r := \max(U_j \,|\, j \geq r).$$

Theorem 2.4 *(a)*

$$V_r = \frac{r-1}{r} \cdot V_{r+1} + \frac{1}{r} \cdot \max(\frac{r}{n}, V_{r+1}).$$

(b) Es gibt ein R mit

$$V_1 = V_2 = ... = V_R > V_{R+1} > V_{R+2} > ... > V_n.$$

Es ist das maximale R mit

$$\sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \geq 1.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
U_j &= V_j \quad \text{für } j \geq R, \\
U_j &\leq V_j \quad \text{für } j < R.
\end{aligned}$$

(c) Unter den Strategien σ_j, $j \in \{1, ..., n\}$, ist die Strategie σ_R optimal.

(d) Es ist

$$R \in (\frac{n}{e}, \frac{n}{e} + (2 - e^{-1})).$$

Das Intervall enthält 1 oder 2 natürliche Zahlen. Daher ist R dadurch (fast im Fall von 2 Zahlen) eindeutig bestimmt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R}{n} = \frac{1}{e},$$
$$\lim_{n\to\infty} U_R = \frac{1}{e}.$$

Beweis: (a) Der erste Summand in der Formel kommt vom Fall, dass das r-te Gut unter den ersten r Gütern nicht das beste ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{r-1}{r}$. In dem Fall geht der Spieler zum $r+1$-ten Schritt.
Der zweite Summand in der Formel kommt vom Fall, dass das r-te Gut unter den ersten r Gütern das beste ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{1}{r}$. In dem Fall muß der Spieler abwägen, ob es besser ist, das Gut zu wählen oder weiterzuspielen. Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das r-te Gut das beste aller n Güter ist, wenn es das beste unter den ersten r Gütern ist, ist

$$\frac{P(\text{bestes aller } n \text{ Güter})}{P(\text{bestes der ersten } r \text{ Güter})} = \frac{1/n}{1/r} = \frac{r}{n}.$$

(b) Sei $R \in \{1, ..., n\}$ die maximale Zahl mit

$$\sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \geq 1.$$

Induktionsannahme: Für ein $k+1 > R$ ist

$$U_{k+1} = V_{k+1} > U_{k+2} = V_{k+2} > ... > U_n = V_n.$$

Induktionsanfang: $V_n = U_n = \frac{1}{n}$.
Induktionsschritt: Sei auch $k \geq R$. Nach Lemma 2.3 ist

$$U_{k+1} = \frac{k}{n} \cdot \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1}.$$

Die folgende Rechnung benutzt dies und $V_{k+1} = U_{k+1}$ und (a).

$$
\begin{aligned}
V_k &= \frac{k-1}{k} \cdot V_{k+1} + \frac{1}{k} \cdot \max(\frac{k}{n}, V_{k+1}) \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1} + \frac{1}{n} \cdot \max(1, \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1}) \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j-1} \\
&= U_k.
\end{aligned}
$$

Die Rechnung zeigt auch

$$V_k > \frac{k-1}{k} \cdot V_{k+1} + \frac{1}{k} \cdot V_{k+1} = V_{k+1}.$$

Dieser Induktionsbeweis zeigt alle Behauptungen für $j \geq R$ in (b).
Wegen $\sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \geq 1$ ist $\frac{R-1}{n} \leq V_R$. Daher ist $V_{R-1} = V_R$. Induktiv folgt für $j \leq R$

$$\frac{j-1}{n} \leq V_R = V_j \quad \text{und} \quad V_{j-1} = V_j,$$

also

$$V_1 = V_2 = ... = V_R.$$

Die Ungleichung $U_j \leq V_j$ ist trivial nach der Definition von V_j.

(c) Das folgt sofort aus (b).

(d) R ist bestimmt durch

$$\sum_{j=R+1}^{n} \frac{1}{j-1} < 1 \leq \sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1}.$$

Die beiden Summen kann man durch Integrale abschätzen, indem man sie als Obersumme bzw. Untersumme eines Integrals deutet:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=R}^{n-1} \frac{1}{j} &> \int_R^n \frac{1}{x} dx = \log n - \log r, \\
\sum_{j=R-1}^{n-1} \frac{1}{j} &< \int_{R-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx = \log(n-1) - \log(R-2).
\end{aligned}
$$

Man erhält

$$\begin{aligned} & \log n - \log R < 1 < \log(n-1) - \log(R-2), \\ \text{also} \quad & \frac{n}{e} < R < \frac{n-1}{e} + 2 = \frac{n}{e} + (2 - e^{-1}). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der Strategie σ_R zu gewinnen, ist

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{R-1}{n} \cdot \sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \\ &\approx \frac{R-1}{n} \approx \frac{1}{e} \quad \text{für großes } n. \end{aligned}$$ □

Bemerkungen 2.5 (i) $U_R \approx \frac{1}{e}$ für großes n finde ich erstaunlich hoch. Und das optimale R läßt sich erstaunlich leicht charakterisieren und bestimmen.

(ii) Dynkin (1963) hat das Sekretärinnenproblem als ein Markov-Ketten-Stop-Problem gedeutet und auf diese Weise gelöst. Seine Lösung umfaßte die Aussage, dass das Problem in einer präzisierbaren Weise *monoton* ist, und daraus konnte er schließen, dass die Strategie σ_R nicht nur im Vergleich zu den anderen Strategien σ_r optimal ist, sondern dass sie unter allen Strategien optimal ist. Das ist stärker als Theorem 2.4 (c).

(iii) Das Sekretärinnenproblem hat viele Varianten. Im folgenden sollen eine Variante von F.T. Bruss und seine Lösung vorgestellt werden. Das erfordert noch einige Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, an die im folgenden erinnert wird.

Definition/Lemma 2.6 (a) Sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ (siehe Definition 1.1). Dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *Wahrscheinlichkeitsraum*, die Elemente von $\mathcal{A}$ sind die möglichen Ereignisse, und der Wert $P(A) \in [0,1]$ für ein $A \in \mathcal{A}$ ist seine *Wahrscheinlichkeit*.

(b) (Lemma) Zur Menge $\mathbb{R}$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, die alle (offenen, halboffenen, geschlossenen) Intervalle enthält.
Zu jedem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}([a,b])$, die alle Teilintervalle enthält.
(Definition) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{B}([a,b])$ heißen *Borel-σ-Algebren*, ihre Elemente heißen *Borelmengen*.

(c) (Lemma) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Falls für alle $x \in \mathbb{R}$ die Menge $X^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{A}$ ist, ist für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Menge $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
(Definition) Eine solche Abbildung X heißt *Zufallsvariable* (insbesondere ist sie *meßbar*).

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable. Die *Verteilung* von X ist die Abbildung

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1], \quad B \mapsto P(X^{-1}(B)).$$

Die *Verteilungsfunktion* von X ist die Abbildung

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto P_X((-\infty, x)).$$

F_X ist eine monoton wachsende Funktion.

Problem 2.7 (Die Variante zum Sekretärinnenproblem von Bruss (1984))
(a) Gegeben ist eine im allgemeinen unbekannte Anzahl N von Gütern, die einem Spieler zu unbekannten verschiedenen Zeiten Z_i, $i = 1, ..., N$, innerhalb eines Zeitintervalls $[0, T]$ präsentiert werden. Alle $N!$ Reihenfolgen sind gleich wahrscheinlich.
Die Güter haben alle unterschiedlichen Wert für den Spieler. Sobald ihm das r-te Gut präsentiert wird, kennt er das Ranking unter den ersten r Gütern, aber er weiß nichts über das Ranking der weiteren $N - r$ Güter.
Er muß zu irgendeinem Zeitpunkt das zuletzt präsentierte Gut wählen. Dann endet das Spiel. Er hat gewonnen, wenn das gewählte Gut das beste aller N Güter ist. Sonst hat er verloren. Mit welcher Strategie kann er die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen maximieren? Wie hoch ist sie dann ungefähr? Der Spieler ist risikoneutral.
(b) Die im allgemeinen unbekannte Anzahl N wird folgendermaßen modelliert: Auf der Menge $\mathbb{N}$ und der σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ liegt ein im allgemeinen unbekanntes Wahrscheinlichkeitsmaß $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ vor. Dann ist $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), g)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Zufallsvariable N ist einfach die Abbildung $N = \mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
Die Zeiten Z_i werden folgendermaßen modelliert: Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \mu)$, wo μ das Standardmaß ist, das die Längen von Intervallen misst und durch T teilt, sind Z_i lauter Zufallsvariablen, die alle die gleiche stetige Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(y) = 0$ für $y \leq 0$ und $F(y) = 1$ für $y \geq T$ haben.

Bemerkungen 2.8 (i) Dadurch, dass F stetig ist, ist sichergestellt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Güter zugleich ankommen, 0 ist.
Dadurch, dass alle Ankunftszeiten Z_i die gleiche Verteilungsfunktion F haben, ist gewährleistet, dass alle Reihenfolgen gleich wahrscheinlich sind.

(ii) Bemerkung: Die Anzahl N und ihr Wahrscheinlichkeitsmaß sind *im allgemeinen* unbekannt, weil sie manchmal doch als bekannt oder teilweise bekannt angesetzt werden: In Theorem 2.10 wird g als bekannt angesetzt (aber im Korollar 2.11 nicht mehr). Insbesondere wird der Fall $N = n$ mit einem bekannten $n \in \mathbb{N}$ betrachtet, und auch der Fall $N \geq n$ mit einem bekannten $n \in \mathbb{N}$. Im ersten Fall ist also $P(N = n) = g(\{n\}) = 1, P(N \neq n) = g(\mathbb{N} - \{n\}) = 0$. Im zweiten Fall ist $P(N < n) = g(\{1, ..., n-1\}) = 0$.

Definition 2.9 (a) Beim Problem 2.7 bezeichnet $\rho_{x,r}$ mit $x \in [0,T]$ und $r \in \mathbb{N}$ folgende Strategie: Der Spieler läßt alle Güter bis zum Zeitpunkt x passieren und nimmt ihre Werte wahr. Dann wählt er unter den Gütern, die nach dem Zeitpunkt x kommen und einen höheren Wert als alle (jeweils) vorherigen Güter haben, das r-te Gut, falls so eins noch kommt. Falls kein solches bis zum Zeitpunkt T gekommen ist, nimmt er zum Zeitpunkt T das zuletzt gekommene Gut.
Die Strategie $\rho_{x,1}$ wird auch mit ρ_x bezeichnet. (Gleich werden hauptsächlich die Strategien ρ_x studiert.)
(b) Im Spezialfall $[0,T] = [0,1],\ F|_{[0,1]} = \mathrm{id}$, bezeichnet

$$p_n(x) := P(\text{die Strategie } \rho_x \text{ ist erfolgreich} \,|\, N = n)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Strategie ρ_x im Fall $N = n$ mit bekanntem $n \in \mathbb{N}$ erfolgreich ist.

Teil (b) dieser Definition ist dadurch motiviert, dass der allgemeine Fall sich leicht auf den Spezialfall $[0,T] = [0,1],\ F|_{[0,1]} = \mathrm{id}$ reduzieren läßt und dass die Zufallsvariable N mit beliebiger Verteilung g sich aus den Spezialfällen $N = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ zusammensetzt. Das wird der Beweis des folgenden Satzes zeigen. Teil (a) des Satzes betrifft das allgemeine Problem 2.7, Teil (b) den Spezialfall $([0,T] = [0,1], F|_{[0,1]} = \mathrm{id}, N = n)$ im Teil (b) der Definition 2.9.

Theorem 2.10 *(Bruss 1984) (a) (i) Im Problem 2.7 gibt es bei bekannter Verteilung g der Anzahl N und bekannter Verteilungsfunktion F der Ankunftszeitpunkte Z_i der Güter einen Zeitpunkt $z^* \in [0,T]$, so dass unter den Strategien ρ_x keine besser als die Strategie ρ_{z^*} ist. z^* erfüllt $z^* < e_F^{-1}$, wobei $e_F^{-1} := \inf(z \,|\, F(z) = e^{-1})$ ist.*
(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für jedes g mit $P(N < n_0) = 0$ gilt:

$$z^* \in [e_F^{-1} - \varepsilon, e_F^{-1}).$$

(b) Im Spezialfall $[0,T] = [0,1],\ F|_{[0,1]} = \mathrm{id}$ und $N = n$ ist

$$p_n(x) = \frac{1}{n}(1-x)^n + x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k.$$

Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $p_n : [0,1] \to [0,1]$ ist monoton fallend und konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion p_∞ mit $p_\infty(x) := -x \log x$.
Jede Funktion p_n nimmt ihr Maximum an einem eindeutigen Punkt $x_n \in [0, e^{-1})$ an. Insbesondere ist $x_1 = x_2 = 0 < x_3$. Die Funktion p_∞ nimmt ihr Maximum am eindeutigen Punkt e^{-1} an, der Wert ist $p_\infty(e^{-1}) = e^{-1}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Punkte der Maxima ist monoton steigend und konvergiert gegen e^{-1}.

Beweis: (a) wird nach (b) bewiesen.
(b) Sei $N = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ fest. $p_n(x)$ für ein $x \in [0,1]$ ist die Summe über alle $k \in \{1, ..., n-1\}$ für die Wahrscheinlichkeit, dass in der Bestenliste das $(k+1)$-te Gut im Zeitraum $[0,x]$ ankommt, dass die k besten im Zeitraum $[x,1]$ ankommen, und dass unter diesen das beste zuerst ankommt, plus der Wahrscheinlichkeit, dass alle n Güter im Zeitraum $[x,1]$ ankommen, und unter ihnen das beste zuerst.
Für irgendein Gut ist die Wahrscheinlichkeit, im Zeitraum $[0,x]$ anzukommen, gleich x und die Wahrscheinlichkeit, im Zeitraum $[x,1]$ anzukommen, gleich $1-x$. Wenn man schon weiß, dass die k besten im Zeitraum $[x,1]$ ankommen, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendein bestimmtes von ihnen (zum Beispiel das beste) als erstes ankommt, gleich $\frac{1}{k}$. Daher ist

$$p_n(x) = x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k + \frac{1}{n}(1-x)^n.$$

Es ist

$$\begin{aligned} p_n(x) - p_{n+1}(x) &= -x \cdot \frac{1}{n}(1-x)^n + \frac{1}{n}(1-x)^n - \frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}(1-x)^{n+1} > 0 \qquad \text{für } x \in [0,1). \end{aligned}$$

Daher ist die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend auf $[0,1)$ und konstant in $x = 1$. Weil die Summe ohne den Vorfaktor x ein Anfang der Taylorentwicklung der Funktion $-\log x$ ist, und wegen des Vorfaktors x, konvergiert die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen p_∞.
Es ist

$$\begin{aligned} p_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k + x\sum_{k=1}^{n-1}(1-x)^{k-1}(-1) - (1-x)^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k - x \cdot \frac{1-(1-x)^{n-1}}{1-(1-x)} - (1-x)^{n-1} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k, \end{aligned}$$

also insbesondere $p_2'(0) = 0$, $p_n'(0) > 0$ für $n \geq 3$, $p_n'(1) = -1 < 0$. Es ist

$$\begin{aligned} p_n'' &= -\sum_{k=1}^{n-1}(1-x)^{k-1} \\ &= -\frac{1-(1-x)^{n-1}}{x} \qquad \text{für } x \in (0,1] \text{ und } n \geq 2 \\ &< 0 \qquad \text{für } x \in [0,1] \text{ und } n \geq 2. \end{aligned}$$

Daher hat p_n auf $[0,1]$ sein Maximum an einem eindeutigen Punkt $x_n \in [0,1)$, und das ist für $n \geq 2$ der eindeutige Punkt x_n mit $p_n'(x_n) = 0$. Offenbar ist $x_1 = x_2 = 0$. Wegen $p_n'(0) > 0$ für $n \geq 3$ ist $x_3 > 0$. Aus der Formel für $p_n'(x)$ folgt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab $n = 2$ streng monoton wachsend ist. Sie konvergiert gegen e^{-1}, den Punkt, wo p_∞ sein Maximum annimmt:

$$\begin{aligned} p_\infty'(x) &= -\log x - 1, \quad p_\infty'(e^{-1}) = 0, \\ p_\infty''(x) &= -\frac{1}{x} < 0 \quad \text{für } x > 0, \\ p_\infty(e^{-1}) &= -e^{-1}\log e^{-1} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Daher sind alle $x_n \in [0, e^{-1})$.

(a) Die Reduktion von beliebigem $[0,T]\&F$ auf $[0,1]\&F_{neu}|_{[0,1]} = \mathrm{id}$ ist ziemlich trivial. Man nennt die alte Zeitkoordinate $z \in [0,T]$ und setzt als neue Zeitkoordinate

$$x := F(z) \in [0,1]$$

an. Dann wird das Zeitintervall $[0,1]$, und die neue Verteilungsfunktion wird $F_{neu} = \mathrm{id}$.
Sei

$$G(x) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \cdot P(N = n).$$

Dann ist $G(x)$ die Wahrscheinlichkeit, im Fall $[0,1]\&F_{neu}$ mit der Strategie ρ_x zu gewinnen.
Wegen $\sum_{n=1}^\infty P(N = n) = 1$, und weil die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen p_∞ konvergiert, ist G stetig
Daher existiert ein optimales x^*, nämlich das minimale x^* mit $G(x^*)$ maximal. Weil die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (für $n \geq 2$ streng) monoton wachsend mit Limes e^{-1} ist, ist $x^* < e^{-1}$. Im Fall $N \geq m$ folgt zusätzlich $x^* \geq x_m$, also $x^* \in [x_m, e^{-1})$. Für $m \to \infty$ konvergieren x_m und dieses Intervall gegen den Punkt e^{-1}.
Wenn man wieder zu beliebigen $[0,T]\&F$ zurückgeht und das x^* in ein z^* umrechnet, erhält man im Fall $N \geq m$

$$z^* \in [z_{m,F}^{-1}, e_F^{-1}) \quad \text{mit } z_{m,F}^{-1} := \inf(z \,|\, F(z) = x_m),$$

und es gilt

$$e_F^{-1} - z_{m,F}^{-1} \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

□

Teil (a)(i) des Satzes sieht bis auf die Abschätzung $z^* < e_F^{-1}$ ziemlich trivial aus, Teil (a)(ii) ist etwas feinsinnig, Teil (b) ist das technische Herz des Satzes. Aber die wirklich hübschen Folgerungen kommen nun.

Korollar 2.11 *(a) Die Strategie* $\rho_{e_F^{-1}}$ *hat für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung* g *der Zufallsvariablen* N *eine Erfolgswahrscheinlichkeit* $> e^{-1}$.
(b) Im Fall $P(N = n) = 1$ *ist*

$$e^{-1} \;=\; p_\infty(e^{-1}) < p_n(e^{-1}) < p_n(x_n) \leq U_R.$$

also ist $U_R > e^{-1}$*. Das ergänzt Theorem 2.4.*

(c) Unter allen Strategien $\rho_{x,r}$ *ist* $\rho_{e_F^{-1}}$ *die einzige, die für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung* g *von* N *eine Erfolgswahrscheinlichkeit* $> e^{-1}$ *hat.*

Beweis: (a) Die Erfolgswahrscheinlichkeit der Strategie ρ_x ist laut Beweis von Satz 2.10 (a) gleich $G(F(x))$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} G(e^{-1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n(e^{-1}) \cdot P(N = n) \\ &> \sum_{n=1}^{\infty} p_\infty(e^{-1}) \cdot P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1} \cdot P(N = n) = e^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen streng monoton fallend auf $[0, 1)$ ist. Die zweite Ungleichung folgt daraus, dass p_n sein Maximum nur in x_n annimmt und $x_n < e^{-1}$ ist. Die dritte und letzte Ungleichung folgt daraus, dass nach Bemerkung 2.5 (ii) im Fall $N = n$ die Strategie σ_R (mit Erfolgswahrscheinlichkeit U_R) unter allen Strategien die beste ist.
(c) Zuerst wird $\rho_{e_F^{-1}}$ mit einer Strategie ρ_z mit $z \neq e_F^{-1}$ verglichen. $z \neq e_F^{-1}$ wird schlechter als e_F^{-1}, falls die Zufallsvariable N die Ungleichung $N \geq m$ für ein genügend großes m erfüllt, denn dann ist $z \neq z^*$ und z^* ist sehr nahe an e_F^{-1}, und die Erfolgswahrscheinlichkeiten von ρ_{z^*} und $\rho_{e_F^{-1}}$ sind nahe beieinander und größer als die von ρ_z.
Nun wird $\rho_{e_F^{-1}}$ mit anderen Strategien $\rho_{z,r}$ mit $r \geq 2$ verglichen: $\rho_{z,r}$ hat Erfolgswahrscheinlichkeit $= 0$, falls die Zufallsvariable N die Ungleichung $N < r$ erfüllt. $\square$

Bemerkungen 2.12 (i) Theorem 2.10 (a) ist je nachdem, wie man es liest, erhellend oder irreführend. Die Existenz der optimalen Stopp-Zeit z^* ist gut, aber z^* ist schwer zu bestimmen. Wichtiger ist, dass sie oft nahe an der Stopp-Zeit e_F^{-1} ist, und die ist oft nicht so schwer abzuschätzen. Korollar 2.11 (a)+(c) zeigt, dass man mit dieser bei jeder möglichen Verteilung der Zufallsvariablen N ziemlich gut liegt. Dass die Stopp-Zeit e_F^{-1} immer (bei beliebiger Verteilung von N) so gut ist, ist die wichtigste Konsequenz aus Theorem 2.10 und Korollar 2.11. Daher kann man sich oft die Berechnung des genauen Wertes z^* sparen.

(ii) Die folgende Tabelle aus [Br84] illustriert (i) im Fall $N = n$. Die Zeilen mit R und U_R stehen nicht in [Br84].

$N = n$	1	2	3	5	10	15	$\to \infty$
R	1	2	2	3	4	6	
U_R	1	$0,5$	$0,5$	$0,4333$	$0,3987$	$0,3894$	e^{-1}
x_n	0	0	$0,2679$	$0,3489$	$0,3670$	$0,3678$	e^{-1}
$p_n(x_n)$	1	$0,5$	$0,3987$	$0,3723$	$0,3680$	$0,3678$	e^{-1}
$p_n(e_F^{-1})$	$0,6321$	0.4323	$0,3902$	$0,3718$	$0,3680$	$0,3678$	e^{-1}
$p_n(x_n) - p_n(e_F^{-1})$	$< 0,368$	$< 0,068$	$< 0,009$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-8}$	

(iii) Falls die Zufallsvariable N nicht unbekannt ist, kann eine Strategie $\rho_{x,r}$ besser sein als die Strategie ρ_{z^*}. Das tritt schon im Fall $N = 3, T = 1, F = \mathrm{id}$ ein: Dann ist

$$\rho_{0,2} = \sigma_2 = \sigma_R,$$

das ist die optimale Strategie nach Bemerkung 2.5 (ii), und sie ist besser als $\rho_{x_2} = \rho_{z^*} = \rho_0$.

Die Übersichtsartikel [Fe89] und [Fr83] geben ein klares Bild der Geschichte und der Varianten des Sekretärinnenproblems und viele Referenzen.

Literatur

[Br84] F.T. Bruss: A unified approach to a class of best choice problems with in unknown number of options. The Annals of Probability **12.3** (1984), 882–889.

[Dy63] E.B. Dynkin: The optimal choice of the stopping moment for a Markov process. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **150**, 238–240.

[DJ69] E.B. Dynkin, A.A. Juschkewitsch: Markov Prozesse – Sätze und Aufgaben. Springer, 1969.

[Fe89] T.S. Ferguson: Who solved the secretary problem? Statistical Science **4.3** (1989), 282–289.

[Fr83] P.R. Freeman: The secretary problem and its extensions. Internat. Statist. Rev. **51** (1983), 189–206.

[Li61] D.V. Lindley: Dynamic programming and decision theory. Appl. Statist. **10** (1961), 35–51.

3 Zweiseitige Märkte mit Matching-Mechanismus

Der Nobelpreis in Wirtschaftswissenschaften 2012 wurde an Roth und Shapley für ihre Resultate zu Matching Märkten vergeben. Ein Matching Markt ist ein zweiseitiger Markt, wo es zwei Gruppen von Spielern gibt, so dass die Spieler der beiden Gruppen zusammengebracht werden müssen, bijektiv oder nicht, unter Berücksichtigung von Präferenzen, die die einzelnen Spieler haben.
Beispiele sind Männer und Frauen auf dem/einem Heiratsmarkt, Firmen und Arbeitsuchende auf dem/einem Jobmarkt, Krankenhäuser und Praktikanten, Schulen und Schüler. In allen Fällen sollen die Marktteilnehmer so zusammengebracht werden, dass jeder einen (oder viele) möglichst gute(n) Partner erhält.
Was da eine gute Lösung ist, hängt dabei davon ab, für wen sie gut sein soll. Wenn man davon ausgeht, dass die Präferenzen bekannt sind, ist das Problem, ein Matching zu finden, Teil der kooperativen Spieltheorie. Wenn die Marktteilnehmer andere als die wahren Präferenzen angeben können, hat das Problem Elemente der nichtkooperativen Spieltheorie.

Beispiele 3.1 (i) In New York City müssen jedes Jahr etwa 90000 Schüler auf etwa 500 High Schools mit Hilfe eines Platzvergabesystems verteilt werden. Erst 2004 wurde das Vergabesystem mit spieltheoretischen Erkenntnisse neugefasst. Ein dafür ausgearbeiteter Algorithmus sorgt nun für eine recht gute Verteilung. Schulen und Schüler geben dabei Präferenzen an. Vor 2004 wurden etwa 30000 Schüler auf Schulen verteilt, die nicht ihren Präferenzen entsprachen, seit 2004 sind es nur noch etwa 3000.

(ii) In den USA war und ist es üblich, dass angehende Ärzte nach dem Studium ein *Internship* in einem Krankenhaus ableisten. Die Wahl des Krankenhauses ist dabei für ihre Karriere und ihr Leben wichtig. Für die Krankenhäuser ist es wichtig, genug und möglichst gute angehende Ärzte zu bekommen. Der Wunsch der Krankenhäuser, sich möglichst früh möglichst gute Kandidaten zu sichern, hatte in den 40er Jahren dazu geführt, dass schon bis zu 2 Jahre vor Studienabschluss Übereinkünfte zu Internships zwischen Kandidaten und Krankenhäusern geschlossen wurden. Das hat das Studium gestört, und es war mangels bekannter Abschlussnoten für die Krankenhäuser mit Risiken verbunden.
Anfang der 50 Jahre wurde dann ein Vergabeverfahren eingeführt, bei dem Krankenhäuser und Kandidaten Präferenzlisten an eine zentrale Stelle gegeben haben, die dann die Verteilung vornahm. Obwohl die Teinahme freiwillig war, war viele Jahre lang die Teilnahmequote auf Studentenseite bei etwa 95 %. Erst in den 70er Jahre sank sie auf 85 %, zu einem guten Teil aufgrund

von Ehepaaren von Medizinstudenten, deren besondere Situationen das Verteilungsverfahren nicht berücksichtigte.
Das Vergabeverfahren ist verwandt zum Gale-Shapley-Algorithmus, den Gale und Shapley 1962 (lange nach den Medizinern) fanden und der unten erklärt wird.

In beiden Beispielen sind die Matchings nicht bijektiv: Schulen nehmen viel mehr als einen Schüler auf, Krankenhäuser sind variabel bei der Anzahl der Internships und sind froh über recht viele.
Aber im folgenden konzentrieren wir uns auf Matching Märkte, wo bijektive Matchings hergestellt werden sollen. Um es anschaulich zu machen, sprechen wir von einem Heiratsmarkt und Männern und Frauen. Weiter wird angenommen, dass die Präferenzordnungen strikt sind, d.h. für eine Person sind alle potentiellen Partner verschieden gut, keine zwei sind gleich gut. Diese Annahme ist nicht so unrealistisch und macht die Theorie um einiges einfacher.
Wir werden uns auch auf Ergebnisse innerhalb der kooperativen Spieltheorie beschränken, genauer: Die wahren Präferenzen der Marktteilnehmer werden als bekannt angenommen, und mit ihnen wird gearbeitet. Am Ende des Kapitels kommen Bemerkungen zu Erweiterungen, insbesondere zu Ergebnissen, die Strategien betreffen, wenn Marktteilnehmer bezüglich ihrer Präferenzen lügen können, um so eventuell ein für sie besseres Matching zu erreichen.
Die Theorie der Matching Märkte begann mit dem Gale-Shapley-Algorithmus 1962 und ist dann in den 70er und 80er Jahren aufgeblüht. Die Praxis der Matching Märkte ist natürlich viel älter, wie das Beispiel 3.1 (ii) oben zeigt. Eine gute Quelle für die Entwicklung bis 1990 ist ein Buch von Roth und Sotomayor von 1990. Alles Material in diesem Kapitel bis auf das letzte Theorem 3.25 zum Blocking Pair Algorithmus findet sich in diesem Buch. Theorem 3.25 ist aus einer Arbeit von Roth und Vande Vate von 1990, die genau wie das Buch und 2 weitere Quellen am Ende des Kapitels zitiert ist.

Definition 3.2 Ein *Matching Markt* ist ein Tupel

$$(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W}).$$

Hier sind M und W endliche nichtleere Mengen, M ist die Menge der Männer, und W ist die Menge der Frauen. $>_m$ für ein $m \in M$ ist eine (vollständige transitive strikte) Ordnung auf der Menge $W \cup \{m\}$, und $>_w$ für ein $w \in W$ ist eine Ordnung auf der Menge $M \cup \{w\}$.
Die Ordnungen $>_m$ und $>_w$ werden gern mit *Präferenzlisten* kodiert: Die Präferenzliste $P(m)$ zu $>_m$ ist ein geordnetes Tupel, in dem jedes Element von $W \cup \{m\}$ genau einmal steht, und zwar von links nach rechts in abnehmender Präferenz für den Mann m. Analog für $>_w$.

Deutung: Je weiter links eine Frau in der Präferenzliste eines Mannes m steht, desto lieber möchte er sie heiraten. Der Mann m hat die Option, Single zu bleiben. Jede der Frauen links von m in der Präferenzliste würde er dieser Option vorziehen. Aber er zieht es vor Single zu bleiben, als eine der Frauen rechts von m in der Präferenzliste zu heiraten. Er selbst und die Frauen w mit $w >_m m$ sind die für ihn *akzeptablen Partner*.
Analog für jede Frau w. Gleichgeschlechtliche Ehen sind im Modell nicht vorgesehen.

Definition 3.3 Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt.
(a) Ein *Matching* μ ist eine Involution

$$\begin{array}{rl} & \mu : M \cup W \to M \cup W \\ \text{mit} & \forall\ m \in M \quad \mu(m) = m \text{ oder } \mu(m) \in W \\ \text{und} & \forall\ w \in W \quad \mu(w) = w \text{ oder } \mu(w) \in M, \\ \text{Involution heißt:} & \mu^2 = \mathrm{id}, \quad \text{jede Involution ist bijektiv.} \end{array}$$

Dann ist $\mu(m)$ der *Partner* von $m \in M$, und $\mu(w)$ ist der *Partner* von $w \in W$.

(b) Ein Matching μ ist *individuell rational* wenn darin jeder Mann und jede Frau einen akzeptablen Partner hat.
Bei einem Matching μ ist eine Person, die keinen akzeptablen Partner hat, eine *blockierende* Person. Also ist ein Matching individuell rational, wenn es darin keine blockierende Person gibt.

(c) Bei einem Matching μ ist ein Paar $(m, w) \in M \times W$ ein *blockierendes Paar*, falls gilt:

$$w >_m \mu(m) \quad \text{ und } m >_w \mu(w),$$

d.h. falls m und w einander ihren jeweiligen Partnern vorziehen.

(d) Ein Matching μ heißt *stabil*, wenn es individuell rational ist und von keinem Paar blockiert wird.

Das Matching $\mu = \mathrm{id}$, wo also jede Person Single bleibt, ist individuell rational. Es gibt auch stabile Matchings, aber das ist nicht trivial. Der Gale-Shapley-Algorithmus, Theorem 3.6, wird zu jedem Matching Markt zwei stabile Matchings konstruieren.

Beispiel 3.4 (Knuth 1976)

$$\begin{array}{rl} M = (m_1, m_2, m_3), & W = (w_1, w_2, w_3), \\ P(m_1) = (w_2, w_1, w_3, m_1), & P(w_1) = (m_1, m_3, m_2, w_1), \\ P(m_2) = (w_1, w_3, w_2, m_2), & P(w_2) = (m_3, m_1, m_2, w_2), \\ P(m_3) = (w_1, w_2, w_3, m_3), & P(w_3) = (m_1, m_3, m_2, w_3). \end{array}$$

Bei allen Teilnehmern hat das Single-Dasein niedrigste Präferenz. Daher ist jedes Matching individuell rational.
Neben dem Matching id, wo alle Teilnehmer Singles sind, gibt es zu jedem Paar (m_i, w_j) genau zwei Matchings, wo nur m_i und w_j Singles sind, und genau ein Matching, wo nur m_i und w_j nicht Singles sind, und es gibt 6 Matchings ohne Singles (man kann sie mit den Permutationen von M in Bijektion bringen). Also gibt es insgesamt $1+(2+1)\cdot 3\cdot 3+6 = 34$ Matchings.
Aber bei einem Matching, wo m und w Singles sind, ist (m, w) ein blockierendes Paar, denn sie ziehen es vor, einander zu heiraten, als Singles zu bleiben. Daher werden im folgenden nur die 6 Matchings betrachtet, die keine Singles enthalten:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix},$$

$$\mu_4 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}, \quad \mu_5 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_6 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}.$$

μ_1, μ_2, μ_3 und μ_4 haben je 2 blockierende Paare, μ_5 und μ_6 haben keine blockierenden Paare, also sind genau μ_5 und μ_6 stabile Matchings. Man kann versuchen, ein nicht stabiles Matching zu verbessern, indem man ein blockierendes Paar (m, w) wählt und zum neuen Matching übergeht, wo man das Paar (m, w) und das Paar $(\mu(w), \mu(m))$ verheiratet (und das dritte Paar in Ruhe läßt).
Das folgende Diagramm zeigt alle 6 Matchings und alle blockierenden Paare. Jedes blockierende Paar steht zusammen mit einem Pfeil, dessen Fußpunkt das Matching anzeigt, bei dem das blockierende Paar blockierend ist, und dessen Spitze das Matching anzeigt, das man nach dem Schritt oben erhält. Man sieht, dass man von jedem Matching zu einem stabilen Matching gelangen kann, aber auch, dass es einen Zykel gibt. Knuth (1976) hatte das Beispiel so gewählt, dass es den Zykel gibt.

$$\begin{tikzcd}
\mu_1 \arrow[d, "(m_1{,}w_2)"] \arrow[dd, bend right, "(m_3{,}w_2)"'] & \mu_4 \arrow[l, "(m_1{,}w_1)"'] \arrow[dd, bend left, "(m_1{,}w_2)"] \\
\mu_2 \arrow[r, "(m_3{,}w_2)"] \arrow[dr, "(m_3{,}w_1)"] & \mu_3 \arrow[u, "(m_3{,}w_1)"] \arrow[dl, "(m_1{,}w_1)"'] \\
\mu_6 & \mu_5
\end{tikzcd}$$

Bemerkungen 3.5 (i) Fast immer (außer in Theorem 3.20) werden nur individuell rationale Matchings betrachtet. Dann braucht man für jeden Mann $m \in M$ nur die Einschränkung der Ordnung $>_m$ auf die Menge $W(m) := \{w \in W \,|\, w >_m m\}$, oder auf die Menge $W(m) \cup \{m\}$ der akzeptablen Partner, und analog für jede Frau $w \in W$. Für den Mann m sind dann die nicht akzeptablen Frauen, also die, die er weniger als das Single-Dasein mag, egal. Analog für jede Frau $w \in W$.

(ii) Der Gale-Shapley-Algorithmus, Theorem 3.6, wird die Existenz von stabilen Matchings beweisen. Das hängt aber an mehreren Eigenschaften des Matching Marktes: Er ist zweiseitig, alle Präferenzen sind strikt, die Matchings sind Bijektionen.

(iii) Es gibt ein Beispiel von Gale und Shapley, das *Roommate Problem*, eines einseitiges Marktes, wo Paare gebildet werden sollen und Präferenzen vorliegen und es keine stabilen Matchings gibt (Blatt 3, Aufgabe 1).

(iv) Es gibt auch ein Beispiel eines dreiseitigen Marktes (Mann - Frau - Kind), wo Tripel gebildet werden sollen und jede Person Präferenzen unter den Paaren aus Personen der anderen beiden Seiten hat und es keine stabilen Matchings gibt.

(v) Es gibt auch ein Beispiel eines zweiseitigen Marktes mit den Seiten *Firmen* und *Arbeitsuchende*, wo die Matchings nicht bijektiv sind, sondern eine Teilmenge (oder alle) der Arbeiter auf die Firmen aufgeteilt werden sollen und wo es keine stabilen Matchings gibt (Blatt 3, Aufgabe 2).

Im Gale-Shapley-Algorithmus heißt ein Antrag *akzeptabel*, falls er einer Frau w von einem für sie akzeptablen Mann m gestellt wird, d.h. falls $m >_w w$ gilt.

Theorem 3.6 *(Gale-Shapley-Algorithmus, 1962)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt. Der folgende Algorithmus führt zu einem stabilen Matching μ_M. Wenn man die Rollen von Frauen und Männern vertauscht, führt er zu einem stabilen Matching μ_W.
Algorithmus:

1. Schritt: (a) Jeder Mann, bei dem auf Platz 1 seiner Präferenzliste eine Frau steht, macht dieser Frau einen Antrag. Falls er selbst auf Platz 1 steht, macht er niemandem einen Antrag, sondern wird Single.

(b) Jede Frau wählt unter den akzeptablen Anträgen (falls es solche Anträge gibt) den besten Antrag aus und nimmt ihn vorläufig an. Alle anderen Anträge weist sie ab.

2. Schritt: (a) Alle abgewiesenen Männer, bei denen auf Platz 2 ihrer Präferenzliste eine Frau steht, machen dieser Frau einen Antrag. Falls *ein abgewiesener Mann selbst auf Platz 2 steht, macht er keinen Antrag mehr, sondern wird Single.*

(b) Jede Frau wählt unter den akzeptablen Anträgen des 2. Schritts, falls es solche gibt, und dem im 1. Schritt vorläufig angenommenen Antrag, falls es so einen gibt, den besten aus und nimmt ihn vorläufig an. Alle anderen Anträge weist sie ab (auch den eventuell im 1. Schritt vorläufig angenommen Antrag, falls im 2. Schritt ein besserer gekommen ist).

Weitere Schritte: (a) Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis jeder Mann entweder einen Antrag gemacht hat, der vorläufig angenommen ist, oder aber jeder akzeptablen Frau auf seiner Liste einen Antrag gemacht hat, der dann abgelehnt worden ist.

(b) Dann werden alle vorläufig angenommen Anträge festgemacht. Die Männer ohne vorläufig angenommene Anträge und die Frauen, die keine akzeptablen Anträge erhalten haben, werden Singles.

Beweis: Da jeder Mann nur akzeptablen Frauen Anträge gemacht hat und jede Frau nur akzeptable Anträge vorläufig angenommen hat, und Männer und Frauen ohne bindenden Antrag Singles werden, erhält man genau ein individuell rationales Matching μ_M.
Es bleibt zu zeigen, dass es stabil ist. Das wird indirekt gezeigt. Sei (m, w) ein blockierendes Paar. Dann gilt $w >_m \mu_M(m)$. Daher hatte der Mann m der Frau w einen Antrag gemacht. Der ist aber offensichtlich abgelehnt worden. Das bedeutet, dass die Frau w jemand besseres gefunden hat. Aber dann kann das Paar (m, w) nicht blockierend sein. Also gibt es kein blockierendes Paar. □

Beispiele 3.7 (i) Der Gale-Shapley-Algorithmus im Beispiel 3.4.
1. Schritt: m_1 macht w_2 einen Antrag, m_2 und m_3 machen w_1 Anträge. w_2 nimmt den Antrag von m_1 vorläufig an, w_1 nimmt den Antrag von m_3 vorläufig an.
2. Schritt: m_2 macht w_3 einen Antrag. w_3 nimmt den Antrag von m_2 vorläufig an.
3. Schritt: Alle Männer haben zur Zeit vorläufig angenommene Anträge. Die Anträge werden bindend gemacht. Man erhält das stabile Matching

$$\mu_M = \mu_5 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Der Gale-Shapley-Algorithmus mit vertauschten Rollen von Männern und Frauen im Beispiel 3.4 führt zum stabilen Matching (Blatt 3, Aufgabe 3)

$$\mu_W = \mu_6 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Der Gale-Shapley-Algorithmus liefert nicht nur die Existenz von stabilen Matchings. Die beiden Matchings μ_M und μ_W, die mit ihm konstruiert werden, haben auch besondere Eigenschaften.
Theorem 3.17 wird zeigen, dass μ_M unter allen stabilen Matchings für alle Männer das beste und für alle Frauen das schlechteste ist, und umgekehrt bei μ_W. Zwar konkurrieren die Männer um die Frauen (und umgekehrt), aber wenn die Männer und Frauen realistisch sind und sich an die stabilen Matchings halten, dann ergeben sich implizit Koalitionen, alle Männer gegen alle Frauen, und es gibt das für alle Männer beste und für alle Frauen schlechteste stabile Matching μ_M und das für alle Männer schlechteste und für alle Frauen beste Matching μ_W.
Die folgenden Resultate geben der Menge aller stabilen Matchings Struktur und zeigen die besonderen Rollen von μ_M und μ_W.

Lemma 3.8 *(Zerlegungslemma von Knuth (1976)) Seien μ und ν stabile Matchings in einem Matching Markt $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$. Die Mengen M und W werden in je 3 Teilmengen aufgeteilt.*

$$\begin{aligned} M^+ &:= \{m \in M \mid \mu(m) >_m \nu(m)\}, \\ M^0 &:= \{m \in M \mid \mu(m) = \nu(m)\}, \\ M^- &:= \{m \in M \mid \mu(m) <_m \nu(m)\}, \end{aligned}$$

und analog werden W^+, W^0 und W^- definiert.
Dann gilt: (i) Sowohl unter μ als auch unter ν sind die Männer in M^+ mit den Frauen in W^- gepaart.
(ii) Sowohl unter μ als auch unter ν sind die Männer in M^- mit den Frauen in W^+ gepaart.
(iii) Sowohl unter μ also auch unter ν sind die Personen in $M^0 \cup W^0$ mit den Personen in $M^0 \cup W^0$ gepaart.
In Formeln:

$$\begin{aligned} M^+ &\overset{\mu}{\rightleftarrows} W^-, & M^+ &\overset{\nu}{\rightleftarrows} W^-, \\ M^- &\overset{\mu}{\rightleftarrows} W^+, & M^- &\overset{\nu}{\rightleftarrows} W^+, \\ M^0 \cup W^0 &\overset{\mu}{\rightleftarrows} M^0 \cup W^0, & M^0 \cup W^0 &\overset{\nu}{\rightleftarrows} M^0 \cup W^0. \end{aligned}$$

Beweis: Da $M^0 \cup W^0$ die Menge der Personen ist, auf denen μ und ν übereinstimmen, ist (iii) klar.
Für ein $m \in M^+$ gilt

$$\mu(m) >_m \nu(m) \geq_m m,$$

also ist m in μ nicht Single, also ist $\mu(m) \in W$. Sei $w := \mu(m) (\neq \nu(m))$. Da ν stabil ist, ist (m, w) kein blockierendes Paar in ν. Also ist

$$\nu(w) >_w \mu(w) = m.$$

Daraus folgt $w \in W^-$.
Also ist $\mu(M^+) \subset W^-$. Analog schließt man $\mu(W^+) \subset M^-$. Analog schließt man für ν (mit vertauschten Rollen von M^+ und M^- und von W^+ und W^-) $\nu(M^-) \subset W^+$ und $\nu(W^-) \subset M^+$. Weil μ und ν Bijektionen sind, folgt $|M^+| = |W^-|$ und $|M^-| = |W^+|$. Damit und weil μ und ν Involutionen sind, folgen nun (i) und (ii). □

Das Lemma sagt, dass sowohl unter μ als auch unter ν die Männer, die mit μ (bzw. ν) zufriedener sind, mit den Frauen gepaart sind, die mit ν (bzw. μ) zufriedener sind.
Wenn alle Männer mit μ mindestens so zufrieden sind wie mit ν und mindestens einer mit μ echt zufriedener ist, wird $\mu >_M \nu$ geschrieben. Die Notation $\mu >_W \nu$ wird analog definiert. $>_M$ und $>_W$ definieren partielle (transitive strikte) Ordnungen auf der Menge aller Matchings.

Korollar 3.9 *Seien μ und ν zwei stabile Matchings in einem Matching Markt. Dann gilt*

$$\mu >_M \nu \iff \nu >_W \mu.$$

Beweis: $\mu >_M \nu$ bedeutet gerade $M^- = \emptyset$ und $M^+ \neq \emptyset$, und $\nu >_W \mu$ bedeutet gerade $W^+ = \emptyset$ und $W^- \neq \emptyset$. Nach Lemma 3.8 gilt aber $|M^-| = |W^+|$ und $|M^+| = |W^-|$, daher gilt

$$M^- = \emptyset \iff W^+ = \emptyset, \qquad M^+ \neq \emptyset \iff W^- \neq \emptyset.$$ □

Korollar 3.10 *Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt. Dann haben alle stabilen Matchings die gleichen Singles.*

Beweis: Indirekt. Seien μ und ν zwei stabile Matchings. Sei m ein Mann, der in ν ein Single ist, aber nicht in μ. Dann ist $m \in M^+$. Nach Lemma 3.8 ist $\nu(m) \in W^-$, also ist m doch kein Single in ν, Widerspruch. Der Fall, dass eine Frau in ν ein Single ist, aber nicht in μ, wird genauso zum Widerspruch geführt. □

Definition 3.11 Für zwei stabile Matchings μ und ν in einem Matching Markt werden zwei Abbildungen

$$\mu \vee_M \nu : M \cup W \to M \cup W \quad \text{und } \mu \wedge_M \nu : M \cup W \to M \cup W$$

folgendermaßen definiert.

$$\begin{aligned}
\mu \vee_M \nu(m) &:= \text{der für } m \text{ bessere Partner in } \{\mu(m), \nu(m)\},\\
\mu \vee_M \nu(w) &:= \text{der für } w \text{ schlechtere Partner in } \{\mu(w), \nu(w)\},\\
\mu \wedge_M \nu(m) &:= \text{der für } m \text{ schlechtere Partner in } \{\mu(m), \nu(m)\},\\
\mu \wedge_M \nu(w) &:= \text{der für } w \text{ bessere Partner in } \{\mu(w), \nu(w)\}.
\end{aligned}$$

Theorem 3.12 *(Gittertheorem von Conway (laut Knuth 1976)) Seien μ und ν zwei stabile Matchings in einem Matching Markt. Dann sind auch $\mu \vee_M \nu$ und $\mu \wedge_M \nu$ stabile Matchings.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\lambda := \mu \vee_M \nu$ ein stabiles Matching ist. Durch Vertauschen der Rollen von Männern und Frauen erhält man dann auch, dass $\mu \wedge_M \nu$ ein stabiles Matching ist. Es wird gezeigt werden:

1. Es ist eine Involution.

2. Es ist ein Matching.

3. Es ist individuell rational.

4. Es ist ein stabiles Matching.

1. Schritt: Sei $m \in M$. Im Fall $\mu(m) = \nu(m) =: p$ ist auch $\lambda(m) = p$, und dann ist $\nu(p) = m = \mu(p) = \lambda(p)$. Also ist λ eingeschränkt auf $\{m, p\}$ eine Involution. Hier wird p geschrieben, um den Fall, dass m ein Single ist, einzuschließen.
Sei nun $\mu(m) \neq \nu(m)$, und sei oBdA $w := \mu(m) >_m \nu(m)$, also $w = \lambda(m)$. Dann ist $m \in M^+$. Nach Lemma 3.8 ist $w = \mu(m) \in W^-$, also $\nu(w) >_w \mu(w) = m$. Daher ist $\lambda(w) = m$, und λ ist eingeschränkt auf $\{m, w\}$ eine Involution.

2. Schritt: λ ist nach dem 1. Schritt eine Involution. Es ist auch klar, dass eine Person in λ Single ist oder mit einer Person des anderen Geschlechts gepaart ist. Daher ist λ ein Matching.

3. Schritt: Für jede Person ist der Partner in λ einer der akzeptablen Partner in μ und ν. Daher ist mit μ und ν auch λ individuell rational.

4. Schritt: Indirekt. Sei (m, w) ein blockierendes Paar für λ. Dann gilt

$$w >_m \lambda(m) \quad \text{und} \quad m >_w \lambda(w),$$

also

$$(w >_m \mu(m) \text{ und } w >_m \nu(m)) \quad \text{und} \quad (m >_w \mu(w) \text{ oder } m >_w \nu(w)).$$

Im Fall $m >_w \mu(w)$ ist (m, w) ein blockierendes Paar für μ, im Fall $m >_w \nu(w)$ ist (m, w) ein blockierendes Paar für ν. Aber μ und ν sind stabil, Widerspruch. □

Definition 3.13 (a) Ein *Gitter* $(L, >)$ ist eine nichtleere Menge L mit einer partiellen (transitiven strikten) Ordnung $>$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei Elemente a und $b \neq a$ von L eindeutige Elemente $a \vee b$ und $a \wedge b$ mit folgenden Eigenschaften existieren.

$$\begin{aligned} a \vee b \geq a, &\quad a \vee b \geq b. \\ \forall\, c \in L \text{ mit } c \geq a,\ c \geq b \text{ gilt:} &\quad c \geq a \vee b. \\ a \wedge b \leq a, &\quad a \wedge b \leq b. \\ \forall\, c \in L \text{ mit } c \leq a,\ c \leq b \text{ gilt:} &\quad c \leq a \wedge b. \end{aligned}$$

Deutung: $a \vee b$ ist bezüglich $>$ das Supremum von a und b, und $a \wedge b$ ist bezüglich $>$ das Infimum von a und b.
Bemerkung: Man setzt $a \vee a := a$ und $a \wedge a := a$. Das ist konsistent mit den Eigenschaften oben.

(b Ein Gitter $(L, >)$ heißt *distributiv*, falls alle $a, b, c \in L$ folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

Korollar 3.14 *Sei* $(M, W, (>_m)_{m \in M}, (>_w)_{w \in W})$ *ein Matching Markt, und sei* L *die Menge der stabilen Matchings. Dann sind die Paare* $(L, >_M)$ *und* $(L, >_W)$ *distributive Gitter.*

Beweis: Nach Theorem 3.8 ist L nichtleer. Theorem 3.12 zeigt, dass $(L, >_M)$ und $(L, >_W)$ Gitter sind. Dass sie distributiv sind, ist eine leichte Übung. □

Bemerkungen 3.15 (i) Ein orientierter Graph ist ein Tupel (E, P) mit der endlichen Eckenmenge E und der Teilmenge P von $E \times E$. Die Elemente von P sind gerichtete Kanten, also Pfeile, zwischen zwei Ecken.

(ii) Einem endlichen Gitter $(L, >)$ kann man in folgender Weise einen orientierten Graphen zuordnen. Man setzt $E := L$, und ein Paar $(a, b) \in L \times L$ ist genau dann in P, wenn $a < b$ gilt und es kein Element c mit $a < c < b$ gibt.

(iii) Der Graph zu einem endlichen Gitter $(L, >)$ hat spezielle Eigenschaften.

- (α) Es gibt keine Zykel, denn sonst würde wegen der Transitivität von $>$ jedes Element a eines Zykel $a > a$ erfüllen (insbesondere gibt es keinen Pfeil von einem Element auf sich selbst).

- (β) Im Fall $a < b$ gibt es vielleicht keinen Pfeil von a nach b, aber sicher eine Kette von Pfeilen, die von a über andere Elemente zu b führt.

- (γ) Der Graph ist zusammenhängend. Denn zu beliebigen Elementen a und b gibt es eine Kette von Pfeilen von a zu $a \vee b$ und eine Kette von Pfeilen von b zu $a \vee b$. (Man könnte auch $a \wedge b$ benutzen.)

(δ) Es gibt genau ein Element a_{max}, von dem kein Pfeil ausgeht. Das ist das eindeutige maximale Element, d.h. es erfüllt $a_{max} > b$ für jedes $b \in L - \{a_{max}\}$. Jede maximale Kette von Pfeilen endet in a_{max}.

Analog gibt es genau ein Element a_{min}, zu dem kein Pfeil führt. Das ist das eindeutige minimale Element, d.h. es erfüllt $a_{min} < b$ für jedes $b \in L - \{a_{min}\}$. Jede maximale Kette von Pfeilen beginnt in a_{min}.

(ε) Treffen sich 2 Ketten von Pfeilen, die in a bzw b starten, in einer Ecke c, so gibt es eine Kette von Pfeilen von $a \vee b$ nach c. Eine analoge Eigenschaft erfüllt $a \wedge b$.

(iv) Sei $(M, W, (>_m)_{m \in M}, (>_w)_{w \in W})$ ein Matching Markt, und sei L die Menge der stabilen Matchings. Wegen Korollar 3.9 erhält man den Graphen des Gitters $(L, >_W)$ aus dem Graphen des Gitters $(L, >_M)$ durch Umdrehen aller Pfeile.

Definition 3.16 Sei $(M, W, (>_m)_{m \in M}, (>_w)_{w \in W})$ ein Matching Markt. Für jede Person p ist $E(p) \subset M \cup W$ die Menge der Personen, die in mindestens einem stabilen Matching Partner von p sind. Sie sind die *erreichbaren* Partner der Person p.
Ein Paar (m, w) oder (m, m) oder (w, w) ist *erreichbar*, falls es in mindestens einem stabilen Matching auftritt.

Theorem 3.17 *Sei* $(M, W, (>_m)_{m \in M}, (>_w)_{w \in W})$ *ein Matching Markt.*
(a) Dann ist μ_M *das maximale Element im Gitter* $(L, >_M)$*, und* μ_W *ist das minimale Element im Gitter* $(L, >_M)$*.*
(b) Weiter ist

$$\begin{aligned}
\mu_M(m) &= \text{der beste erreichbare Partner von } m,\\
\mu_M(w) &= \text{der schlechteste erreichbare Partner von } w,\\
\mu_W(m) &= \text{der schlechteste erreichbare Partner von } m,\\
\mu_W(w) &= \text{der beste erreichbare Partner von } w.
\end{aligned}$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\mu_M(m)$ für jeden Mann m der beste erreichbare Partner von m ist. Daraus folgt sofort, dass μ_M das maximale Element im Gitter $(L, >_M)$ ist. Wegen Bemerkung 3.15 (iv) ist es dann auch das minimale Element im Gitter $(L, >_W)$. Durch Vertauschen der Rollen von Männern und Frauen folgt, dass μ_W das maximale Element im Gitter (L, μ_W) und das minimale Element im Gitter (L, μ_M) ist.
Schließlich erhält man mit dem Gittertheorem 3.12 nun leicht die restlichen 3 Aussagen von Teil (b): Wenn zum Beispiel für eine Frau $\mu_M(w)$ nicht der schlechteste erreichbare Partner von w wäre, gäbe es ein anderes stabiles Matching ν mit $\nu(w) <_W \mu_M(w)$, aber dann wäre für diese Frau das Matching

$\mu_M \vee \nu$ schlechter als das Matching μ, also wäre μ_M nicht das minimale Element im Gitter $(L, >_W)$.
Um zu beweisen, dass für jeden Mann m der Partner $\mu_M(m)$ der beste erreichbare Partner ist, reicht es zu zeigen, dass im Gale-Shapley-Algorithmus jeder Mann, der Frauen als erreichbare Partner hat (der also in den stabilen Matchings nicht Single bleibt, vgl. Korollar 3.10) mit dem Antrag an die beste erreichbare Frau Erfolg hat. Das wird indirekt gezeigt.
Sei also der k-te Schritt im Gale-Shapley-Algorithmus der erste Schritt, in dem ein Mann m von der für ihn besten erreichbaren Frau w abgelehnt wird. Da w für m erreichbar ist, ist er für sie akzeptabel. Daher war der Grund ihrer Ablehnung, dass ihr im k-ten Schritt oder schon vorher ein Antrag eines für sie besseren Mannes $\widetilde{m}$ vorliegt.
Dann sind für $\widetilde{m}$ alle Frauen, denen er vor w einen Antrag gemacht hatte, die also besser für ihn wären, unerreichbar. Denn sonst wäre der k-te Schritt nicht der erste Schritt, in dem ein Mann von der besten für ihn erreichbaren Frau abgelehnt wird.
Da w für m erreichbar ist, gibt es ein stabiles Matching ν mit $\nu(m) = w$. In diesem Matching ν ist der Partner $\nu(\widetilde{m})(\neq w)$ für $\widetilde{m}$ natürlich erreichbar, also hat er ihr (falls $\nu(\widetilde{m})$ eine Frau ist) im Gale-Shapley-Algorithmus nicht vor w einen Antrag gemacht, also ist $\nu(\widetilde{m}) <_{\widetilde{m}} w$. Daher ist das Paar $(\widetilde{m}, w)$ ein blockierendes Paar im stabilen Matching ν, ein Widerspruch. □

Beispiel 3.18 (Knuth)

$$\begin{aligned}
M &= (m_1, m_2, m_3, m_4), & W &= (w_1, w_2, w_3, w_4),\\
P(m_1) &= (w_1, w_2, w_3, w_4, m_1), & P(w_1) &= (m_4, m_3, m_2, m_1, w_1),\\
P(m_2) &= (w_2, w_1, w_4, w_3, m_2), & P(w_2) &= (m_3, m_4, m_1, m_2, w_2),\\
P(m_3) &= (w_3, w_4, w_1, w_2, m_3), & P(w_3) &= (m_2, m_1, m_4, m_3, w_3),\\
P(m_4) &= (w_4, w_3, w_2, w_1, m_3), & P(w_4) &= (m_1, m_2, m_3, m_4, w_3).
\end{aligned}$$

Bei allen Teilnehmern hat das Single-Dasein niedrigste Präferenz. Daher ist jedes Matching individuell rational. Bei einem Matching, wo m und w Singles sind, ist (m, w) ein blockierendes Paar, denn sie ziehen es vor, einander zu heiraten, als Singles zu bleiben. Es gibt $4! = 24$ Matchings ohne Singles. 10 von ihnen sind stabil. Das Bild unten zeigt diese 10 Matchings und die Pfeile des Graphen zu $(L, >_M)$. Jedes 4-Tupel $(a_1a_2a_3a_4)$ kodiert das Matching μ mit $\mu(w_i) = m_{a_i}$. Dass genau diese 10 Matchings stabil sind, folgt aus weiteren interessanten und ungewöhnlich regulären Eigenschaften dieses Matching Marktes.
Bei einem Paar (m, w) sei $a(m, w)$ der Rang des Mannes m in der Präferenzliste der Frau w, und $b(m, w)$ sei der Rang der Frau w in der Präferenzliste des Mannes m. Dann ist stets $a(m, w) + b(m, w) = 5$. Es ist ein ziemlich unglücklicher Heiratsmarkt.

Die Matchings $\mu_1, \mu_4, \mu_7, \mu_{10}$ sind genau die Matchings, wo jeder Mann die Frau auf Rank $1, 2, 3$ bzw. 4 seiner Präferenzliste bekommt und jede Frau den Mann auf Rank $4, 3, 2$ bzw. 1 ihrer Präferenzliste. Die anderen 6 Matchings $\mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6, \mu_8, \mu_9$ sind die, wo die Frauen von je 2 Männern für diese gleichen Rang haben und die Differenz dieser beiden Ränge 1 ist. Kein Paar (m, w) kann ein blockierendes Paar sein. Denn die Summe der Ränge der gegenwärtigen Partner ist genau 5 bei den ersten 4 Matchings und 4 oder 5 oder 6 bei den zweiten 6 Matchings. Wäre ein Paar (m, w) blockierend, so müsste w für m einen höheren Rang haben und m für w einen höheren Rang haben als der jeweilige Partner. Aber dann wäre $a(m, w) + b(m, w) \leq 6 - 2 = 4 \neq 5$, ein Widerspruch. Also sind $\mu_1, ..., \mu_{10}$ stabil. Dass die anderen Matchings ohne Singles nicht stabil sind, ist eine Übung.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mu_M = \mu_1 = (1234) & \\
\mu_2 = (2134) \arrow[ur] & & \mu_3 = (1243) \arrow[ul] \\
 & \mu_4 = (2143) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\mu_5 = (3142) \arrow[ur] & & \mu_6 = (2413) \arrow[ul] \\
 & \mu_7 = (3412) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\mu_8 = (4312) \arrow[ur] & & \mu_9 = (3421) \arrow[ul] \\
 & \mu_W = \mu_{10} = (4321) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Hier sind jeweils alle Personen des anderen Geschlechts erreichbar, $E(m_i) = W$ und $E(w_i) = M$ für alle $i = 1, 2, 3, 4$. Daher sind auch alle Paare (m, w) erreichbar. Paare (m, m) und (w, w) sind nicht erreichbar, bei den stabilen Matchings gibt es keine Singles. Das Beispiel illustriert auch schön den folgenden Satz. Im Beispiel trifft man allein schon bei μ_1, μ_4, μ_7 und μ_{10} zusammen alle erreichbaren Partner und alle erreichbaren Paare.

Theorem 3.19 *(Gusfield, (hier ohne Beweis)) Auf jeder Kette von Pfeilen von μ_W nach μ_M im Graphen zum Gitter $(L, >_M)$ eines Matching Marktes trifft man alle erreichbaren Paare.*

Der folgende Satz zeigt, dass μ_M für die Männer auch nicht verbesserbar ist, wenn man die stabilen Matchings verläßt, aber starke Forderungen an das *besser* stellt. Das Beispiel danach zeigt, dass μ_M für die Männer bei schwächeren Forderungen verbesserbar ist.

Theorem 3.20 *(Schwache Pareto-Optimalität)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m \in M}, (>_w)_{w \in W})$ ein Matching Markt. Es gibt kein individuell rationales Matching μ, so dass es für jeden Mann besser als μ_M ist, d.h. so dass $\mu(m) >_m \mu_M(m)$ für alle Männer gilt. (Eine analoge Aussage gilt für die Frauen.)

Beweis: Indirekt. Sei μ ein solches Matching. Dann wäre unter μ jeder Mann m mit einer Frau $w = \mu(m) \in \mu(M)$ liiert, die ihn beim Gale-Shapley-Algorithmus abgewiesen hat. Da μ individuell rational ist, ist m für w akzeptabel. Daher hat sie ihn im Gale-Shapley Algorithmus zugunsten eines besseren Mannes abgewiesen. Also ist sie auch unter μ_M mit einem Mann liiert und nicht Single.
Weil die Frauen in $\mu(M)$ unter μ alle Männer als Partner aufgebraucht haben, und weil sie auch unter μ_M Männer als Partner haben, brauchen sie auch unter μ_M alle Männer als Partner auf. Daraus folgt erstens $\mu_M(M) = \mu(M)$, und zweitens, dass alle Männer unter μ_M mit Frauen liiert sind (und keiner von ihnen Single ist).
Im vorletzten Schritt des Gale-Shapley Algorithmus wurden die letzten Anträge gemacht und vorläufig angenommen. Sei nun w eine Frau, die da einen Antrag bekommen und vorläufig und dann auch bindend angenommen hat. Sie kann vorher keinen akzeptablen Antrag bekommen haben, denn sonst hätte sie direkt vor dem vorletzten Schritt einen vorläufig angenommenen Antrag und hätte den dann im vorletzten Schritt zugunsten des neuen Antrags abgelehnt. Aber dann würde der dabei abgelehnte Mann nicht mehr zu einem weiteren Antrag kommen und würde Single werden, ein Widerspruch. Also hat w vorher keinen akzeptablen Antrag bekommen.
Daher sind alle Männer außer $\mu_M(w)$ mit ihren Partnern unter μ_M und erst recht mit ihren Partnern unter μ glücklicher als mit w. Und auch $\mu_M(w)$ ist mit seinem Partner unter μ glücklicher als mit w. Daher ist w unter μ ein Single. Dieser Widerspruch beweist den Satz. □

Beispiel 3.21 (Roth, starke Pareto-Optimalität gilt nicht immer)

$$\begin{aligned} M &= \{m_1, m_2, m_3\}, & W &= \{w_1, w_2, w_3\} \\ P(m_1) &= (w_2, w_1, w_3, m_1), & P(w_1) &= (m_1, m_2, m_3, w_1), \\ P(m_2) &= (w_1, w_2, w_3, m_2), & P(w_2) &= (m_3, m_1, m_2, w_2), \\ P(m_3) &= (w_1, w_2, w_3, m_3), & P(w_3) &= (m_1, m_2, m_3, w_3). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mu_M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \quad (= \mu_W).$$

Aber

$$\mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

ist individuell rational und stellt m_2 gleich gut und m_1 und m_3 besser. μ ist nicht stabil wegen des blockierenden Paars (m_2, w_1).

Bemerkung 3.22 Es gibt Algorithmen zu Berechnung aller stabilen Matchings in einem Matching Markt, und auch Abschätzungen zur Anzahl aller stabilen Matchings, siehe [RS90, 3.2]. Hier beschränken wir uns auf die folgenden beiden Sätze.

Lemma 3.23 *(Vande Vate) Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt mit $|M| = |W|$, und wo das Single-Dasein für jede Person die niedrigste Priorität hat. Dann sind natürlich alle Matchings individuell rational. Ein Matching μ ohne Singles wird nun durch eine Matrix $B(\mu) = (b_{mw})_{m\in M, w\in W}$ kodiert, die*

$$b_{mw} = \begin{cases} 0 & \text{falls } w \neq \mu(m), \\ 1 & \text{falls } w = \mu(m), \end{cases}$$

erfüllt.
Dann ist eine ganzzahlige Matrix (c_{mw}) genau dann die Matrix $B(\mu)$ für ein stabiles Matching μ, wenn sie die folgenden 4 Bedingungen erfüllt.

$$c_{mw} \geq 0 \qquad \forall\ m \in M, w \in W, \tag{3.1}$$

$$\sum_w c_{mw} = 1 \qquad \forall\ m \in M, \tag{3.2}$$

$$\sum_m c_{mw} = 1 \qquad \forall\ w \in W, \tag{3.3}$$

$$\sum_{w >_{\widetilde{m}} \widetilde{w}} c_{\widetilde{m}w} + \sum_{m >_{\widetilde{w}} \widetilde{m}} c_{m\widetilde{w}} + c_{\widetilde{m}\widetilde{w}} \geq 1 \qquad \forall\ \widetilde{m} \in M, \widetilde{w} \in W. \tag{3.4}$$

Beweis: Dieser Beweis ist einfach, der des nächsten Satzes nicht. Die ersten drei Bedingungen sagen, dass für jeden Mann einer der Einträge c_{mw} gleich 1 ist und alle anderen gleich 0 sind, und dass für jede Frau w einer der Einträge c_{mw} gleich 1 ist und alle anderen gleich 0 sind. Daher gibt die Matrix (c_{mw}) ein Matching ohne Singles.
Die vierte Bedingung sagt gerade, dass $(\widetilde{m}, \widetilde{w})$ kein blockierendes Paar ist.$\square$

Theorem 3.24 *(Vande Vate, hier ohne Beweis) Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Lemma 3.23 sei C das konvexe Polyeder im $\mathbb{R}^{|M|\times|M|}$, das* *durch die 4 Bedingungen im Lemma 3.23 definiert ist. Dann sind die Punkte in C mit ganzzahligen Koordinaten (also die, die stabile Matchings kodieren) genau die Ecken von C.*

Ursprünglich wollte ich beim nächsten Satz auch den Beweis präsentieren. Er ist mäßig schwer und hübsch. Aber nach dem vielen schon präsentierten Material scheint er mir nun nicht so wichtig. Allerdings wird dadurch die folgende Bemerkung nicht durchsichtig: Der Beweis des Satzes enthält einen Algorithmus, der im Spezialfall, wo im Start-Matching alle Personen Singles sind und eine gewisse Ausgangsmenge die Menge aller Frauen ist, genau auf den Gale-Shapley Algorithmus hinausläuft.

Theorem 3.25 *(Roth und Vande Vate, 1990, hier ohne Beweis)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt und μ_1 irgendein nicht stabiles Matching. Dann gibt es eine Folge $(\mu_2, ..., \mu_k)$ (für ein $k \in \mathbb{N}$) von Matchings, so dass μ_k stabil ist und μ_i aus μ_{i-1} entsteht, indem man ein blockierendes Paar in μ_{i-1} auswählt und miteinander verheiratet und ihre alten Partner zu Singles macht.

Beispiel 3.4 gibt ein Beispiel, wo man bei unglücklicher Wahl von blockierenden Paaren in einem Zykel von nicht stabilen Matchings bleibt. Aber natürlich gibt es auch zu jedem Matching eine Folge von Matchings wie im Theorem, die bei einem stabilen Matching endet. Im Beispiel kann man sogar immer $k = 2$ erreichen.
Theorem 3.25 gibt nach dem Algorithmus von Gale und Shapley einen zweiten Beweis für die Existenz von stabilen Matchings.
Aus dem Theorem 3.25 folgt ziemlich unmittelbar Korollar 3.26. Der da beschriebene *Blocking Pair Algorithmus* ist wegen des stochastischen Prozesses nicht wirklich ein Algorithmus.

Korollar 3.26 *(Blocking Pair Algorithmus)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt. Man wähle bei jedem nicht stabilen Matching eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit lauter positiven Wahrscheinlichkeiten auf der Menge seiner blockierenden Paare.
Dann starte man bei einem beliebigen nicht stabilen Matching und durchlaufe in einem stochastischen Prozeß mit den Schritten im Theorem 3.25 einen Pfad von Matchings, wo in jedem Schritt ein blockierendes Paar gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung gewählt wird.
Dieser Pfad endet mit Wahrscheinlichkeit 1 bei einem stabilen Matching.

Bemerkungen 3.27 (i) Schließlich sollen noch einige Bemerkungen zu nicht-kooperativen Aspekten bei Matching Märkten gemacht werden. Die treten auf, wenn die Präferenzlisten nicht bekannt sind und die Personen falsche Präferenzlisten angeben können, mit denen dann ein Algorithmus durchgeführt wird. Die Personen im Matching-Markt werden dann Spieler.

Die Angabe einer Präferenzliste stellt dann eine Strategie dar. Das Resultat des Algorithmus ist ein Matching, und der Rang des Partners bei diesem Matching ist die Auszahlung für einen Spieler. Man erhält ein Spiel in Normalform. Es folgen nun einige Aussagen ohne Beweise.

(ii) Es gibt keinen Algorithmus, der zu einem stabilen Matching führt und bei dem für alle Spieler die Angabe der wahren Präferenzliste eine dominante Strategie ist.

(iii) Wenn es mehrere stabile Matchings gibt und ein Algorithmus bei Angabe der wahren Präferenzlisten zu einem stabilen Matching führt, gibt es mindestens einen Spieler, für den es sich lohnt, eine falsche Präferenzliste anzugeben, falls alle anderen die wahren Präferenzlisten angeben.

(iv) Diesen negativen Aussagen steht die folgende positive Aussage gegenüber. Sei $K \subset M \cup W$ mit $K \neq \emptyset$ und $(M \cup W) - K \neq \emptyset$ eine Koalition von Spielern, die falsche Präferenzlisten angeben, während alle Spieler in $(M \cup W) - K$ die wahren Präferenzlisten angeben. Sei μ ein bezüglich der angegebenen Präferenzlisten stabiles Matching. Dann gibt es ein stabiles Matching ν zu den (für *alle* Spieler) wahren Präferenzlisten, das für mindestens einen Spieler aus K mindestens so gut wie μ ist.

(v) Beim Gale-Shapley Algorithmus ist für jeden Mann eine dominante Strategie, seine wahre Präferenzliste anzugeben.

(vi) Wenn es mehrere stabile Matchings gibt, dann lohnt es sich beim Gale-Shapley Algorithmus für mindestens eine Frau, eine falsche Präferenzliste anzugeben.

(vii) Konkret können die Frauen zusammen folgendes erreichen, wenn $\mu \neq \mu_M$ ein weiteres stabiles Matching ist. Wenn jede Frau w als Präferenzliste $(\mu(w), w)$ angibt (also $\mu(w)$ oder gar keiner) und alle Männer die wahren Präferenzlisten angeben, führt der Gale-Shapley Algorithmus zum Matching μ.

(viii) Immerhin können sich die Frauen im Gale-Shapley Algorithmus durch Angabe falscher Präferenzlisten nicht beliebig verbessern: Geben die Männer die wahren Präferenzlisten an und die Frau beliebige, aber so, dass die resultierende Strategienkombination ein Nash-Gleichgewicht ist, dann ist das mit dem Gale-Shapley Algorithmus erhaltene Matching stabil. Insbesondere bekommen die Frauen so nur erreichbare Partner.

Literatur

[GS62] D. Gale, L.S. Shapley: College admissions and the stability of marriage. The American Mathematical Monthly **69.1** (1962), 9–15.

[Kn76] D.E. Knuth: Mariages stables et leurs relations avec d'autres problemes combinatoires: Introduction a l'analyse mathematique des algorithmes. Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, 1976.

[RS90] A.E. Roth, M.A.O. Sotomayor: Two-sided matching: a study in game-theoretic modeling and analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[RV90] A.E. Roth, J.H. Vande Vate: Random paths to stability in two-sided matching. Econometrica **58.6** (1990), 1475–1480.

4 Das Verhandlungsspiel von Rubinstein

Ariel Rubinstein veröffentlichte 1982 eine Arbeit, in der er ein Verhandlungsspiel und eine Lösung von ihm mit teilspielperfekten Gleichgewichten darstellte. Da Verhandlungsprobleme im Mittelpunkt vieler ökonomischer Modelle standen und bis dahin wenig erfolgreich behandelt worden waren, wurde diese Arbeit als Meilenstein in der Ökonomischen Theorie und in der Spieltheorie betrachtet. Sie hatte allerdings Vorgänger, Arbeiten von Ingolf Ståhl (1972) und Wilhelm Krelle (1977), aber ihre Modelle waren weniger elegant und weniger prominent.

Das *Rubinstein-Spiel* wird in allen wirtschaftsnahen Lehrbüchern der Spieltheorie, die ich gesichtet habe, behandelt, aber oft weniger präzise und oft nur im Spezialfall mit Diskontierung. Es gilt als exemplarisch für die Darstellung nicht-kooperativer Verhandlungsprozesse. Es hat zahlreiche Erweiterungen und Anwendungen erfahren.

Das Spiel selbst ist verblüffend einfach. Die Mathematik, die zur Lösung mit teilspielperfekten Gleichgewichten führt, ist elementar, aber gar nicht so einfach. Auf den ersten Blick ist nicht klar, wieso das Spiel überhaupt schöne konstruktive Lösungen haben sollte, und warum man oft sogar eine eindeutige solche Lösung hat. Denn auf den ersten Blick ist das Spiel verwandt zu unendlich oft wiederholten Spielen, und da gibt es so viele Nash-Gleichgewichte und auch teilspielperfekte Gleichgewichte, dass die einzelnen Gleichgewichte nahezu wertlos und bedeutungslos sind. Dass es bei Rubinsteins Spiel so anders ist, macht einen Reiz des Spiels aus.

Die Beschreibung des Spiels wird auf mehrere Definitionen verteilt. Definition 4.1 gibt eine naive Beschreibung, Definition 4.3 fixiert die *Präferenzordnungen* der beiden Spieler, Definition 4.10 präzisiert die Strategien im Spiel, und Definition 4.12 paßt Selten's Begriff des *teilspielperfekten Gleichgewichts* an das Spiel an.

Definition 4.1 Das *Verhandlungsspiel von Rubinstein* findet zwischen zwei Spielern 1 und 2 statt. Es hat $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ viele Runden. Die Anzahl der Runden wird durch den Verlauf bestimmt. Den beiden Spielern liegt ein beliebig teilbares Gut vor, über dessen Aufteilung sie sich einigen müssen.

In den ungeraden Runden schlägt Spieler 1 eine Aufteilung (s_1, s_2) mit $s_1 + s_2 = 1$ vor, d.h. Anteil s_1 des Gutes für Spieler 1 und Anteil s_2 des Gutes für Spieler 2. Spieler 2 stimmt zu oder lehnt ab. Bei Zustimmung wird diese Aufteilung realisiert, und das Spiel endet. Bei Ablehnung geht das Spiel in die nächste Runde.

In den geraden Runden schlägt Spieler 2 eine Aufteilung (s_1, s_2) mit $s_1 + s_2 = 1$ vor, d.h. Anteil s_1 des Gutes für Spieler 1 und Anteil s_2 des Gutes für Spieler 2. Spieler 1 stimmt zu oder lehnt ab. Bei Zustimmung wird diese Aufteilung realisiert, und das Spiel endet. Bei Ablehnung geht das Spiel in die nächste

Runde. Sei

$$S := \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in [0,1], s_1 + s_2 = 1\} \cong [0,1].$$

Die Elemente werden oft als $s = (s_1, s_2)$ geschrieben. Die möglichen Ergebnisse des Spiels werden als Elemente der Menge $S \times \mathbb{N} \cup \{(0,0,\infty)\}$ kodiert. Hier bedeutet $(s,n) = (s_1, s_2, n) \in S \times \mathbb{N}$, dass die Spieler sich in der n-ten Runde auf die Aufteilung $s = (s_1, s_2)$ geeinigt haben. Das Paar $(0,0,\infty)$ heißt, dass sich die Spieler nie einigen. Beide Spieler haben auf der Menge der möglichen Ergebnisse eine *Präferenzordnung*, die Gegenstand der Definition 4.3 ist.

Bemerkung 4.2 Eine *Präferenzordnung* $\gtrsim$ auf einer nichtleeren Menge M ist eine Relation, die transitiv ($a \gtrsim b$ und $b \gtrsim c \Rightarrow a \gtrsim c$), vollständig ($\forall\ a, b$ ($a \gtrsim b$ oder $b \gtrsim a$)) und reflexiv ($a \gtrsim a$) ist. Eine Präferenzordnung induziert eine Relation $\sim$ durch

$$a \sim b \iff_{Def} a \gtrsim b \text{ und } b \gtrsim a.$$

Übung: Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und bei $a \sim b$, $c \sim d$ gilt $a \gtrsim c \iff b \gtrsim d$, d.h. $\gtrsim$ induziert auf der Menge der Äquivalenzklassen eine Präferenzordnung. Auch die irreflexive Ordnung $>$ mit

$$a > b \iff_{Def} a \gtrsim b \text{ und } a \not\sim b \iff a \gtrsim b \text{ und } b \not\gtrsim a$$

ist dann wohldefiniert. Natürlich hat man

$$a \gtrsim b \iff a \sim b \text{ (ausschließendes) oder } a > b.$$

Die folgende Definition von Rubinstein ist recht allgemein. Besonders instruktiv sind die beiden Spezialfälle (i) und (ii) in den Beispielen 4.5. Viele Lehrbücher beschränken sich auf den ersten von ihnen, die Diskontierung.

Definition 4.3 Im Verhandlungsspiel von Rubinstein (Definition 4.1) hat Spieler 1 eine *Präferenzordnung* $\gtrsim_1$ und Spieler 2 eine Präferenzordnung $\gtrsim_2$ auf der Menge $S \times \mathbb{N}_0 \cup \{(0,0,\infty)\}$ der möglichen Ergebnisse, die 5 Bedingungen (A-1) bis (A-5) erfüllen.
Die 5 Bedingungen an die Präferenzordnungen $\gtrsim_1$ und $\gtrsim_2$ präzisieren die Ideen:

(A-1) Jeder Spieler will möglichst viel vom Gut, mehr ist besser als weniger.

(A-2) Zeit ist kostbar, der gleiche Anteil ist später weniger wert.

(A-3) Periodizität: Die Präferenzordnungen sind konstant unter Addieren von gleich vielen Runden.

(A-4) Die Präferenzordnungen sind *stetig.*

(A-5) Ein größerer Anteil verliert von einer auf die nächste Periode mindestens so viel an Wert wie ein kleinerer.

Die 5 Bedingungen sind wie folgt, hier ist $r = (r_1, r_2), r^n = (r_1^n, r_2^n), s = (s_1, s_2), \widetilde{r} = (\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2), \widetilde{s} = (\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) \in S, t, t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0$:

$$
\begin{array}{ll}
(A-1) & r_i > s_i \Longrightarrow (r,t) >_i (s,t). \\
(A-2) & r_i > 0 \text{ und } t_2 > t_1 \Longrightarrow (r,t_1) >_i (r,t_2) >_i (0,0,\infty). \\
(A-3) & (r,0) \gtrsim_i (s,1) \iff (r,t) \gtrsim_i (s,t+1). \\
(A-4) & r^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} r \text{ und } (r^n,t_1) \gtrsim_i (s,t_2) \Longrightarrow (r,t_1) \gtrsim_i (s,t_2), \\
 & r^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} r \text{ und } (r^n,t_1) \gtrsim_i (0,0,\infty) \Longrightarrow (r,t_1) \gtrsim_i (0,0,\infty). \\
(A-5) & (r,0) \sim_i (\widetilde{r},1),\ (s,0) \sim_i (\widetilde{s},1), r_i > s_i \Longrightarrow \widetilde{r}_i - r_i \geq \widetilde{s}_i - s_i \geq 0.
\end{array}
$$

Um das Resultat von Rubinstein zu entmystifizieren, lohnt es sich, genau zu diskutieren, was in diesen Präferenzordnungen steckt. Das wird in den Punkten 4.4 bis 4.9 gemacht. Erst danach kommen wir zur genauen Beschreibung der Strategien, zur Definition von teilspielperfekten Gleichgewichten und zum Hauptresultat. Die Punkte 4.4 bis 4.9 behandeln die *Geometrie* im Rubinstein-Spiel, die Punkte 4.10 bis 4.18 behandeln die *Spieltheorie* im Rubinstein-Spiel.

Bemerkungen 4.4 (i) Die Periodizität (A-3) ist stark. Sie kann auch so formuliert werden:

$$\forall\, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{N}_0\ \forall\, r, s \in S \quad (r,t_1) \gtrsim_i (s,t_2) \iff (r,t_1+t_3) \gtrsim_i (s,t_2+t_3).$$

Sie sagt, dass $\gtrsim_i$ auf $S \times \mathbb{N}_0$ durch ihre Einschränkung auf $S \times \{t, t+1\}$ für irgendein t bestimmt wird.
(ii) Es ist $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Das Verhandlungsspiel beginnt mit Runde 1. Warum die Präferenzordnungen auch $S \times \{0\}$ einbeziehen, wird unten bei den teilspielperfekten Gleichgewichten klar. Wegen der Periodizität enthält das Paar $(S \times \mathbb{N}_0, \gtrsim_i)$ die gleichen Informationen wie das Paar $(S \times \mathbb{N}, \gtrsim_i)$.
(iii) In (A-2) ist die Bedingung $r_i > 0$ wichtig. Im Fall $r_i = 0$ wird in (A-2) keine Aussage zum Vergleich von (r, t_1) mit (r, t_2) und mit $(0, 0, \infty)$ getroffen. Aber mit (A-4) folgt auch dann $(r, t_1) \gtrsim_i (r, t_2)$ und $(r, t_1) \gtrsim_i (0, 0, \infty)$. Aber ob $>_i$ oder $\sim_i$ gilt, ist in beiden Fällen nicht festgelegt. Auf jeden Fall gibt es für beide Spieler kein schlechteres Ergebnis als $(0, 0, \infty)$.
(iv) Die zweite Zeile von (A-4) steht so in [Ru82]. Man hätte sie durch die einfachere (und zusammen mit den anderen Bedingungen gleichwertige) Bedingung $(r, t) \gtrsim_i (0, 0, \infty)$ ersetzen können.

(v) (A-2) führt dazu, dass beiden Spielern die Zeit drängt und beide Spieler an einer schnellen Lösung interessiert sind.

(vi) Falls für ein $x \in S$ ein $y \in S$ mit $(x, 1) \sim_i (y, 0)$ existiert, ist y wegen (A-1) eindeutig. Daher ist folgende Funktion $p_i : [0, 1] \to [0, 1]$ eindeutig, hier sind $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in S$.

$$p_i(x_i) := \begin{cases} y_i & \text{falls ein } y \in S \text{ mit } (y,0) \sim_i (x,1) \text{ existiert,} \\ 0 & \text{sonst, d.h. im Fall } \forall\, y \in S\ (y,0) >_i (x,1). \end{cases}$$

Sei $s^{(0,i)} \in S$ mit $s_i^{(0,i)} = 0$ und $s^{(1,i)} \in S$ mit $s_i^{(1,i)} = 1$. Die gleiche Information wie die Funktion p_i trägt die Abbildung $d_i : S \to S$,

$$d_i(x) := \begin{cases} y & \text{falls ein } y \in S \text{ mit } (y,0) \sim_i (x,1) \text{ existiert,} \\ s^{(0,i)} & \text{sonst, d.h. im Fall } \forall\, y \in S\ (y,0) >_i (x,1). \end{cases}$$

Es wird auch nützlich sein, p_2 bzw. d_2 in die Koordinaten x_1 und y_1 umzuschreiben:

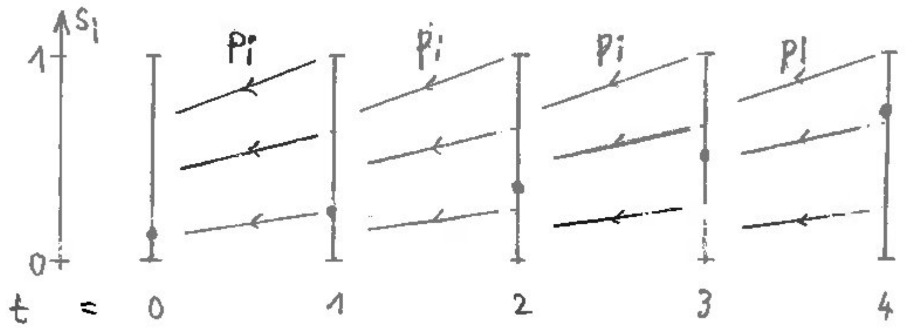
$$\widetilde{p}_2(x_1) := 1 - p_2(x_2) = 1 - p_2(1 - x_1).$$

(vii) Die Funktion p_i gibt fast immer an, welche der Relationen $\sim_i, >_i, <_i$ zwischen einem Paar in $S \times \{0\}$ und einem Paar in $S \times \{1\}$ vorliegt. Die einzige Ausnahme ist der Fall $p_i(1) = 0$. Dann ist nicht klar, ob $(s^{(0,i)}, 0) \sim_i (s^{(1,i)}, 1)$ oder $(s^{(0,i)}, 0) >_i (s^{(1,i)}, 1)$ ist. Diese beiden Fälle unterscheiden sich aber nur wenig und sind beide uninteressant. Bei Bedarf wird der zweite Fall durch die Bedingung

$$(A-6) \qquad\qquad (s^{(0,i)}, 0) \lesssim_i (s^{(1,i)}, 1)$$

ausgeschlossen.

(viii) Die Monotonie (A-1) gibt an, welche der Relationen $\sim_i, >_i, <_i$ zwischen Paaren in $S \times \{0\}$ und zwischen Paaren in $S \times \{1\}$ vorliegt. Die Funktion p_i gibt unter der Annahme (A-6) an, welche der Relationen $\sim_i, >_i, <_i$ zwischen einem Paar in $S \times \{0\}$ und einem Paar in $S \times \{1\}$ vorliegt. Daraus und mit der Periodizität (A-3) kann man für je zwei Paare aus $S \times \mathbb{N}_0$ bestimmen, welche der Relationen $\sim_i, >_i, <_i$ zwischen ihnen vorliegt. Da fehlt nur $(0, 0, \infty)$. Das folgende Bild soll illustrieren, wie man aus (A-1), (A-3), (A-6) und p_i die Präferenzordnung $\gtrsim_i$ auf $S \times \mathbb{N}_0$ rekonstruieren kann.



Bei $(r, t_1), (s, t_2) \in S \times \mathbb{N}_0$ mit $t_1 < t_2$ muß man r_i mit $p_i^{t_2-t_1}(s_i)$ vergleichen. In den Fällen $r_i > p_i^{t_2-t_1}(s_i)$, $r_i < p_i^{t_2-t_1}(s_i)$ und $r_i = p_i^{t_2-t_1}(s_i) \neq 0$ ist $(r, t_1) >_i (s, t_2)$, $(r, t_1) <_i (s, t_2)$ bzw. $(r, t_1) \sim_i (s, t_2)$. Im Fall $r_i = p_i^{t_2-t_1}(s_i) = 0$ muß man genauer hinsehen. Falls zum Beispiel $s_i < 1$ ist, kann man für ein kleines $\varepsilon > 0$ $r_i = 0$ mit $p_i^{t_2-t_1}(s_i + \varepsilon)$ vergleichen. Übung: Was kann man im Fall $s_i = 1$ tun?

Lemma 4.6 stellt die Eigenschaften von p_i zusammen, die aus (A-1) bis (A-5) folgen.

Beispiele 4.5 (i) Diskontierung: Gegeben sind $\delta_1, \delta_2 \in]0, 1[$. Die Präferenzordnung $\gtrsim_i$ ist durch

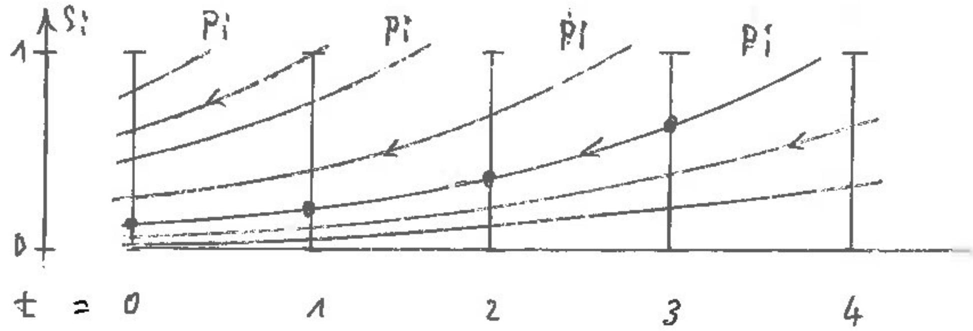
$$(r, t_1) \gtrsim_i (s, t_2) \iff_{Def} r_i \cdot \delta_i^{t_1} \geq s_i \cdot \delta_i^{t_2}$$

und einen noch zu definierenden Vergleich mit $(0, 0, \infty)$ definiert. Es ist $(s^{(0,i)}, t_1) \sim_i (s^{0,i)}, t_2)$. Man kann

$$(s^{(0,i)}, t) \sim_i (0, 0, \infty) \quad \text{oder} \quad (s^{(0,i)}, t) >_i (0, 0, \infty)$$

setzen. Wir wählen $(s^{(0,i)}, t) \sim_i (0, 0, \infty)$. (A-1) bis (A-5) sind erfüllt. Die Funktion p_i ist

$$p_i(x_i) = \delta_i \cdot x_i.$$

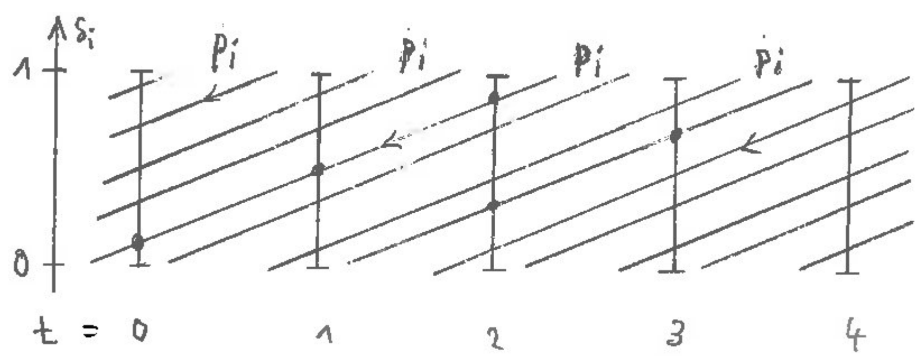


(ii) Feste Verhandlungskosten: Gegeben sind $c_1, c_2 \in]0,1[$. Die Präferenzordnung $\gtrsim_i$ ist durch

$$(r, t_1) \gtrsim_i (s, t_2) \iff_{Def} r_i - c_i \cdot t_1 \geq s_i - c_i \cdot t_2$$

und $(s,t) >_i (0,0,\infty)$ definiert. (A-1) bis (A-5) sind erfüllt. Die Funktion p_i ist

$$p_i(x_i) = \max(0, x_i - c_i).$$



Lemma 4.6 *Sei $\gtrsim_i$ eine Präferenzordnung auf $S \times \mathbb{N}_0$ wie in Definition 4.3, und sei $p_i : [0,1] \to [0,1]$ definiert wie in Bemerkung 4.4 (vi).*
p_i ist stetig und monoton wachsend und erfüllt $p_i(0) = 0$. Sei $x_{i,max} := \max(x_i \,|\, p_i(x_i) = 0)$. Falls $x_{i,max} < 1$ ist, ist p_i auf dem Intervall $[x_{i,max}, 1]$ streng monoton wachsend. $\mathrm{id} - p_i$ ist auf $[0,1]$ monoton wachsend und hat auf $]0,1]$ positive Werte.
Umgekehrt erhält man aus (A-1) und (A-3) und solchem p_i eine Präferenzordnung $\gtrsim_i$ auf $S \times \mathbb{N}_0$ ($(0,0,\infty)$ ist ausgenommen) mit allen Eigenschaften (A-1) bis (A-6) außer denen, die $(0,0,\infty)$ involvieren.

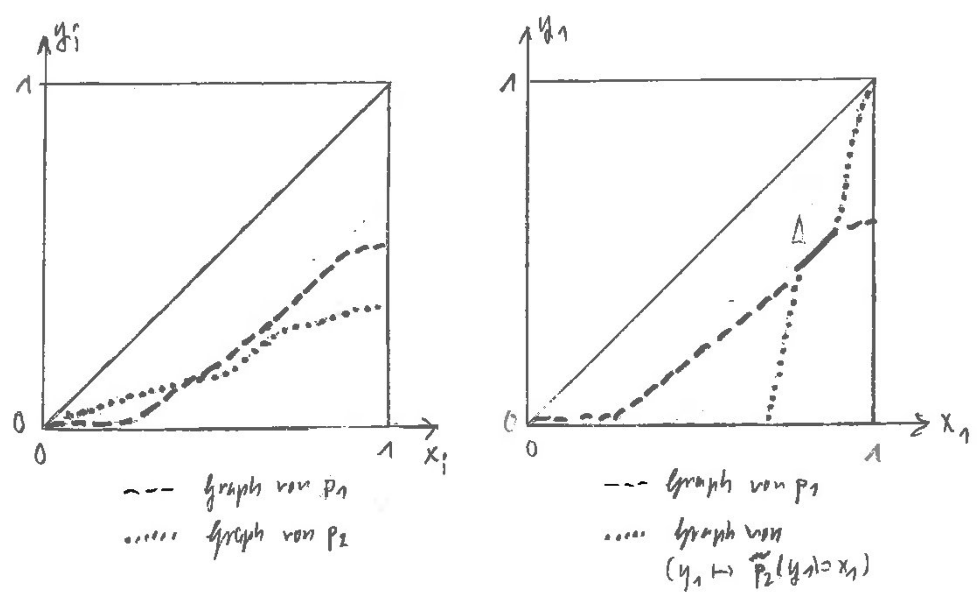
Beweis: p_i ist wegen (A-4) stetig und wegen (A-1) monoton wachsend. Aus Bemerkung 4.4 (iii) folgt $(r, 0) \gtrsim_i (s^{(0,i)}, 1)$ für alle r. Daraus folgt $p_i(0) = 0$. Im Fall $x_{i,max} < 1$ ist p_i auf dem Intervall $[x_{i,max}, 1]$ wegen (A-1) streng monoton wachsend. Wegen (A-5) ist $\mathrm{id} - p_i$ auf $[0, 1]$ monoton wachsend. Wegen (A-2) hat es auf $]0, 1]$ positive Werte.
Der zweite Teil des Beweises (von (A-1) und (A-3) und p_i zu $\gtrsim_i$ mit allen 6 Eigenschaften (A-1) bis (A-6)) wird als Übung gelassen. □

Das folgende Lemma bereitet das Hauptergebnis vor. Die ersten Koordinaten der Punkte in Δ sind die Anteile für Spieler 1 bei den teilspielperfekten Gleichgewichten (Theorem 4.13 (a)).

Lemma 4.7 *Es seien $\gtrsim_1$, $\gtrsim_2$, p_1, p_2 und $\widetilde{p}_2$ wie in Definition 4.3 und Bemerkung 4.4 (vi). Die Menge*

$$\Delta := \{(x_1, y_1) \in [0, 1]^2 \,|\, y_1 = p_1(x_1),\ x_1 = \widetilde{p}_2(y_1)\}$$

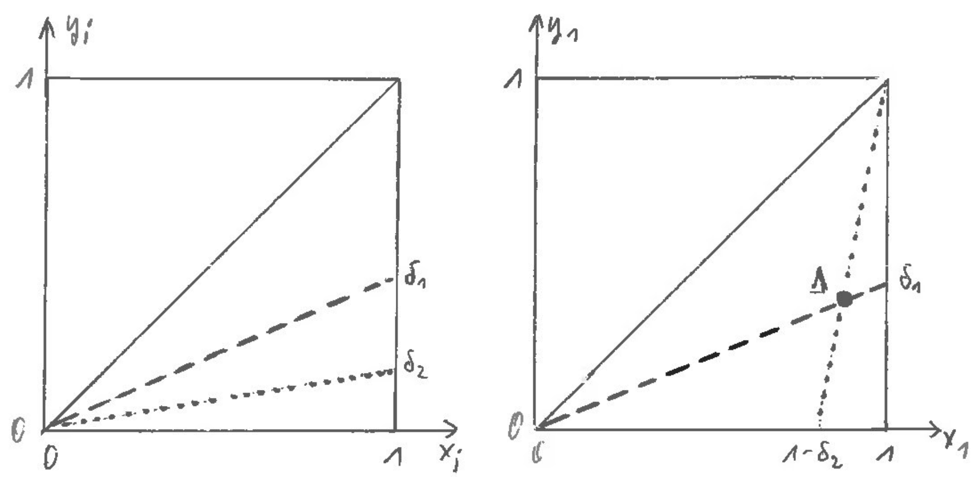
ist nicht leer. Es gibt (a_1, b_1, c) mit $a_1, b_1, c \in [0, 1]$, $a_1 > b_1$, $c \leq 1 - a_1$ und $\Delta = \{(a_1 + z, b_1 + z) \,|\, z \in [0, c]\}$, d.h. Δ ist im Quadrat $[0, 1]$ eine Strecke parallel zur Diagonalen von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$, die in (a_1, b_1) beginnt und Länge $\sqrt{2} \cdot z$ hat. Folgende Skizze wird im Beweis erklärt und illustriert die Situation.



Beweis: Die Graphen von p_1, p_2 und $\widetilde{p}_2$ sind Kurven im Quadrat $[0, 1]$. Die Graphen von p_1 und p_2 starten in $(0, 0)$ und verlaufen im Dreieck zwischen $(0, 0), (1, 0)$ und $(1, 1)$, und zwar abgesehen vom Punkt $(0, 0)$ unterhalb der

Diagonalen von $(0,0)$ nach $(1,1)$. Sie sind monoton wachsend. Weil aber auch $\mathrm{id} - p_i$ monoton wachsend ist, sind sie (da, wo sie differenzierbar sind) höchstens so steil die Diagonale von $(0,0)$ nach $(1,1)$. Den Graphen von $\widetilde{p}_2$ erhält man aus dem Graphen von p_2 durch eine Drehung mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und Winkel π.
Den Graphen der Abbildung $(y_1 \mapsto \widetilde{p}_2(y_1) = x_1)$ erhält man aus dem Graphen der Abbildung $(x_1 \mapsto \widetilde{p}_2(x_1) = y_1)$ durch Spiegelung an der Diagonalen von $(0,0)$ nach $(1,1)$. Also erhält man den Graphen der Abbildung $(y_1 \mapsto \widetilde{p}_2(y_1) = x_1)$ aus dem Graphen von p_2 durch Spiegelung an der Diagonalen von $(0,1)$ nach $(1,0)$. Oben zeigt die linke Skizze die Graphen von p_1 und p_2, und die rechte zeigt die Graphen von p_1 und $(y_1 \mapsto \widetilde{p}_2(y_1) = x_1)$.
Nach Definition ist Δ der Schnitt dieser beiden Graphen. Aus ihrer Stetigkeit, ihrer Monotonie und der Monotonie von $\mathrm{id} - p_1$ und $\mathrm{id} - p_2$ folgt die Gestalt von Δ sofort. □

Beispiele 4.8 (i) Im Beispiel 4.5 (i) sehen die Skizzen oben so aus.



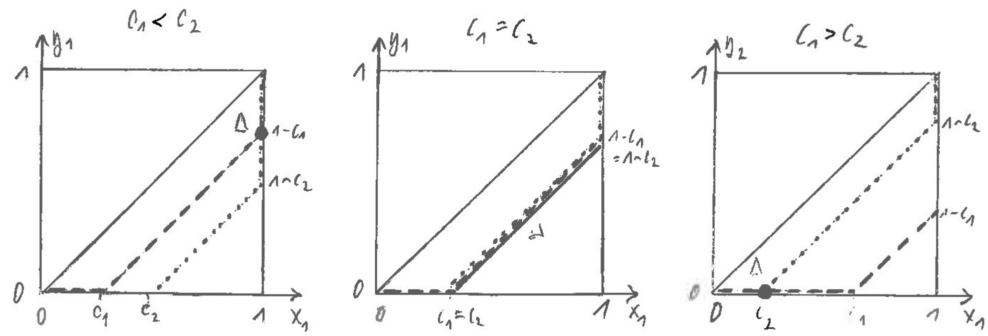
Hier ist Δ nur ein Punkt, der Punkt

$$(x_1^0, y_1^0) = (\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}),$$

denn

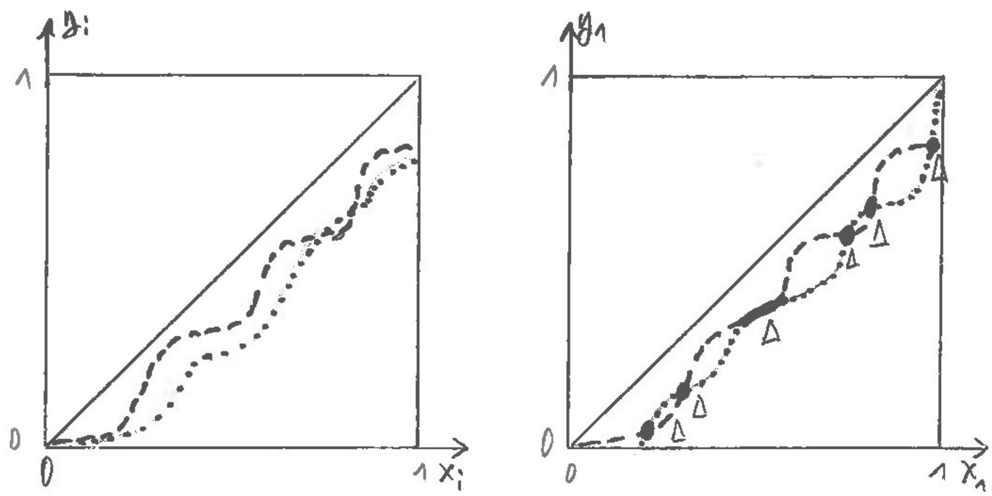
$$\begin{aligned} \delta_1 \cdot x_1^0 = p_1(x_1^0) &= y_1^0, \\ 1 - \delta_2 \cdot (1 - y_1^0) = 1 - p_2(1 - y_1^0) = \widetilde{p}_2(y_1^0) &= x_1^0, \\ \text{daher} \quad 1 - \delta_2 \cdot (1 - \delta_1 \cdot x_1^0) &= x_1^0. \end{aligned}$$

(ii) Im Beispiel 4.5 (ii) sieht die rechte Skizze oben in den 3 Fällen $c_1 < c_2, c_1 = c_2$ und $c_1 > c_2$ verschieden aus.

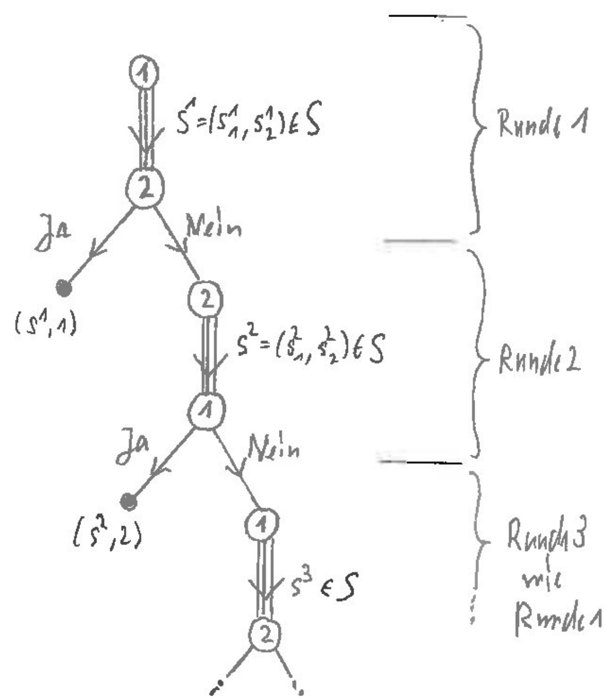


In den Fällen $c_1 < c_2$ und $c_1 > c_2$ ist Δ jeweils nur ein Punkt, der Punkt $(1, 1-c_1)$ bzw. der Punkt $(c_2, 0)$. Im Fall $c_1 = c_2$ ist Δ die (diagonale) Strecke von $(c_1, 0)$ nach $(1, 1-c_1)$.

Bemerkung 4.9 Dass die Menge Δ in Lemma 4.7 ein Punkt oder eine (diagonale) Strecke ist, ist sehr schön, auch für die Lösung des Rubinstein-Spiels. Es hängt aber an allen Eigenschaften (A-1) bis (A-5), insbesondere auch an (A-5). Wenn man (A-5) wegläßt, hat man nicht mehr das monotone Wachsen von $\mathrm{id} - p_i$. Dann ist die Menge Δ weiterhin nicht leer, aber sie kann aus vielen einzelnen Punkten und (auch gekrümmten) Kurvenstücken bestehen. Die folgende Skizze gibt eine Möglichkeit.



Das Rubinstein-Spiel läßt sich ungefähr als ein extensives Spiel mit folgendem unendlich großen Spielbaum auffassen. Nur *ungefähr*, denn bei den dicken Pfeilen hat der Spieler, der am Zug ist, nicht einen von endlich vielen Zügen zu wählen, sondern muss eine Aufteilung $s^n = (s_1^n, s_2^n) \in S \cong [0,1]$ wählen.



Aus diesem Spielbaum ergeben sich die in Definition 4.10 beschriebenen Strategien (des zugehörigen Spiels in Normalform) und auch die *Ergebnisabbildung* $\beta : F \times G \to S \times \mathbb{N} \cup \{(0, 0, \infty)\}$. Hier ist F der Raum der Strategien von Spieler 1 und G der Raum der Strategien von Spieler 2. Strategien und Ergebnisabbildung sind nah verwandt zu Strategien und Ergebnisabbildung bei unendlich oft wiederholten Spielen.

Definition 4.10 (a) Beim Verhandlungsspiel von Rubinstein (Definition 4.1 und Definition 4.3) ist eine Strategie $f \in F$ von Spieler 1 eine Folge $f = (f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Abbildungen mit folgenden Eigenschaften.

$$
\begin{aligned}
&f^1 \in S \qquad \text{(mit } S^0 = \{pt\} \text{ ist das eine Abbildung } f^1 : S^0 \to S),\\
&f^n : S^{n-1} \to S \quad \text{ im Fall von ungeradem } n \geq 3,\\
&f^n : S^n \to \{Ja, Nein\} \quad \text{ im Fall von geradem } n.
\end{aligned}
$$

Eine Strategie $g \in G$ von Spieler 2 ist eine Folge $g = (g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Abbildungen mit folgenden Eigenschaften.

$$
\begin{aligned}
&g^n : S^n \to \{Ja, Nein\} \quad \text{ im Fall von ungeradem } n,\\
&g^n : S^{n-1} \to S \quad \text{ im Fall von geradem } n.
\end{aligned}
$$

(b) Wenn beide Spieler gemäß gewissen Strategien f und g spielen, führt das zu einem eindeutigen Spielverlauf, einer eindeutigen Anzahl $T(f, g) \in$

$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ von Runden, die gespielt wird, einer eindeutigen Folge von Angeboten $(s^n(f,g))_{n \le T(f,g)}$, und einem eindeutigen Ergebnis $\beta(f,g) \in S \times \mathbb{N} \cup \{(0,0,\infty)\}$,

$$\beta(f,g) = \begin{cases} (s^{T(f,g)}, T(f,g)) & \text{falls } T(f,g) \in \mathbb{N}, \\ (0,0,\infty) & \text{falls } T(f,g) = \infty, \end{cases}$$

die sich alle induktiv ergeben.
(c) Man erhält das zugehörige Spiel in Normalform $(\{1,2\}, F \times G, (\beta, S \times \mathbb{N} \cup \{(0,0,\infty\}, \gtrsim_1, \gtrsim_2))$, bei dem $\beta(f,g)$ die Auszahlung zu $(f,g) \in F \times G$ ist und mit $\gtrsim_1$ und $\gtrsim_2$ beurteilt wird. Nash-Gleichgewichte sind wie immer definiert: $(f,g) \in F \times G$ ist ein Nash-Gleichgewicht, falls es kein $\widetilde{f} \in F$ mit $\beta(\widetilde{f}, g) >_1 \beta(f,g)$ und kein $\widetilde{g} \in G$ mit $\beta(f, \widetilde{g}) >_2 \beta(f,g)$ gibt.

Bei unendlich oft wiederholten Spielen in Normalform sagt ein *Folk-Theorem*, dass die Nutzen der Nash-Gleichgewichte eine bestimmte offene Menge im $\mathbb{R}^m$ bilden. Damit ist der Begriff des Nash-Gleichgewichts da zu schwach, um zu interessanten Ergebnissen zu führen. Beim Verhandlungsspiel von Rubinstein ist das ähnlich. Das folgt aus Lemma 4.11.

Lemma 4.11 *Beim Verhandlungsspiel von Rubinstein gibt es zu jeder Aufteilung $s = (s_1, s_2) \in S$ des Gutes ein Nash-Gleichgewicht, dessen Ergebnis diese Aufteilung ist.*

Beweis: Sei $s \in S$. Folgendes Strategienpaar $(f,g) \in F \times G$ wird betrachtet.

$$\begin{aligned} &\text{Für ungerades } n: \\ &f^n(s^1, ..., s^{n-1}) := s, \qquad g^n(s^1, ..., s^n) := \begin{cases} \text{Nein} & \text{falls } s_2^n < s_2 \text{ ist,} \\ \text{Ja} & \text{falls } s_2^n \ge s_2 \text{ ist,} \end{cases} \\ &\text{für gerades } n: \\ &g^n(s^1, ..., s^{n-1}) := s, \qquad f^n(s^1, ..., s^n) := \begin{cases} \text{Nein} & \text{falls } s_1^n < s_1 \text{ ist,} \\ \text{Ja} & \text{falls } s_1^n \ge s_1 \text{ ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist $\beta(f,g) = (s,1)$, d.h. Spieler 2 nimmt in Runde 1 das Angebot s an. Durch einseitiges Abweichen von (f,g) kann keiner der beiden Spieler eine für ihn bessere Aufteilung als s erhalten. Daher lohnt es sich nicht abzuweichen. Also ist (f,g) ein Nash-Gleichgewicht. □

Die folgende Kritik an diesen Nash-Gleichgewichten führt geradewegs zu teilspielperfekten Gleichgewichten. Sei $s \in S$ mit $s_1 < 1$. Vor allem wegen (A-2) gibt es dann ein $a > 0$ klein mit $(s,2) <_2 (s_1 + a, s_2 - a, 1)$. Falls nun Spieler 1 in Runde 1 die Aufteilung $(s_1 + a, s_2 - a)$ anbietet, muß Spieler 2 laut Strategie g ablehnen. Aber tatsächlich wäre es besser für ihn, dieses Angebot anzunehmen, falls sonst Spieler 1 im weiteren Verlauf f spielt

Das Problem hier ist, dass die Einschränkung von (f, g) auf das Spiel ab der 2. Hälfte der 1. Runde zusammen mit dem vorherigen Verlauf des Spiels (der nur aus dem irregulären Angebot $(s_1 + a, s_2 - a)$ besteht) *kein* Nash-Gleichgewicht ist.
Das Problem tritt nicht bei teilspielperfekten Gleichgewichten auf. Eine Strategienkombination (f, g) ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn die Einschränkung von (f, g) auf das Spiel ab einem beliebigen Zeitpunkt und mit einem beliebigen vorherigen Verlauf des Spiels (der nicht gemäß der Strategien abgelaufen sein muss, sondern beliebig war) ein Nash-Gleichgewicht gibt. Beim Verhandlungsspiel von Rubinstein gibt es für den Spieler 1/2 zwei Typen von Zeitpunkten, den Anfang einer ungeraden/geraden Runde und die Mitte einer geraden/ungeraden Runde, an denen er dran ist. Er muss 2 Typen von Entscheidungen treffen.

(Ang) Am Anfang einer Runde ein Angebot erstellen und weiterspielen.

(Ja-Nein) In der Mitte einer Runde ein Angebot annehmen, dann endet das Spiel. Oder in der Mitte einer Runde ein Angebot ablehnen und weiterspielen.

Es darf keine andere Strategie des Spielers 1/2 geben, die zu irgendeinem Zeitpunkt bei beliebigem vorherigen Verlauf zusammen mit der Ausgangsstrategie des Spielers 2/1 zu einem anderen und besseren Ergebnis führt.
Eigentlich ist damit der Begriff des teilspielperfekten Gleichgewichts schon klar formuliert. Definition 4.12 macht ihn aber noch expliziter. Die Definition ist so von Rubinstein.
Sie hat eine Besonderheit: Die Zeitpunkte *Anfang der Runde* und *Mitte der Runde* werden nicht gleich behandelt. Teil (a) der Definition 4.12 definiert Strategien für Teilspiele, die am Anfang einer Runde beginnen, aber nicht Strategien für Teilspiele, die in der Mitte einer Runde beginnen. Das ist durchaus elegant, denn die Teilspiele, die am Anfang einer ungeraden Runde beginnen, sehen genauso aus wie das Originalspiel. Und bei einem Teilspiel, das am Anfang einer geraden Runde beginnt, muss man bloß die Rollen von Spieler 1 und Spieler 2 vertauschen. Dagegen sehen die Strategien für Teilspiele, die in der Mitte einer Runde beginnen, etwas anders aus. Da kommt zuerst eine Ja-Nein Entscheidung. Dadurch, dass für diese Strategien keine Notation etabliert wird, braucht man bei den Optimalitätsbedingungen zu den Entscheidungen in der Mitte der Runden den Zeitpunkt *vorher*. Das wird mit den Elementen von $S \times \{0\}$ erreicht. Auch die unten benutzte Vergangenheitsform in (Ja-1), (Nein-1), (Ja-2) und (Nein-2) paßt dazu.

Definition 4.12 (a) Im Verhandlungsspiel von Rubinstein (Definitionen 4.1, 4.3 und 4.10) seien $s^1, ..., s^n \in S$ und $f \in F, g \in G$. Dann sind $f|_{s^1,...,s^n}$ und $g|_{s^1,...,s^n}$ die Teile der Strategien f und g, die nach n Runden gespielt werden, in denen die Angebote $s^1, ..., s^n$ gemacht und abgelehnt wurden. Genauer: Bei $r^1, ..., r^k \in S$ ist im Fall n ungerade und k ungerade Spieler 2 an der Reihe, ein Angebot zu machen, und es ist

$$\begin{aligned} (g|_{s^1,...,s^n})^k(r^1, ..., r^{k-1}) &= g^{n+k}(s^1, ..., s^n, r^1, ..., r^{k-1}) \in S, \\ (f|_{s^1,...,s^n})^k(r^1, ..., r^k) &= f^{n+k}(s^1, ..., s^n, r^1, ..., r^k) \in \{\text{Ja, Nein}\}. \end{aligned}$$

Die anderen 3 Fälle sind analog, man muß nur aufpassen, wer jeweils ein Angebot machen und wer zustimmen oder ablehnen muss.

(b) Im Verhandlungsspiel von Rubinstein ist ein Strategienpaar $(f, g) \in F \times G$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn folgende 6 Eigenschaften gelten. Seien $s^1, ..., s^n \in S$. Im Fall n gerade soll gelten:

(Ang-1) Situation: n Angebote, alle abgelehnt. Die weitere Strategie $f|_{s^1,...,s^n}$ von Spieler 1 muß optimal sein, d.h. es gibt kein $\widetilde{f} \in F$ mit

$$\beta(\widetilde{f}, g|_{s^1,...,s^n}) >_1 \beta(f|_{s^1,...,s^n}, g|_{s^1,...,s^n}).$$

(Ja-1) Situation: n Angebote, das letzte von Spieler 1 angenommen. Dieses Annehmen muß optimal gewesen sein, d.h. es gibt kein $\widetilde{f} \in F$ mit

$$\beta(\widetilde{f}, g|_{s^1,...,s^n}) >_1 (s^n, 0).$$

(Nein-1) Situation: n Angebote, alle abgelehnt. Die letzte Ablehnung durch Spieler 1 muß optimal gewesen sein, d.h.

$$\beta(f|_{s^1,...,s^n}, g|_{s^1,...,s^n}) \gtrsim_1 (s^n, 0).$$

Im Fall n ungerade soll gelten:

(Ang-2) Situation: n Angebote, alle abgelehnt. Die weitere Strategie $g|_{s^1,...,s^n}$ von Spieler 2 muß optimal sein, d.h. es gibt kein $\widetilde{g} \in G$ mit

$$\beta(f|_{s^1,...,s^n}, \widetilde{g}) >_2 \beta(f|_{s^1,...,s^n}, g|_{s^1,...,s^n}).$$

(Ja-2) Situation: n Angebote, das letzte von Spieler 2 angenommen. Dieses Annehmen muß optimal gewesen sein, d.h. es gibt kein $\widetilde{g} \in G$ mit

$$\beta(f|_{s^1,...,s^n}, \widetilde{g}) >_2 (s^n, 0).$$

(Nein-2) Situation: n Angebote, alle abgelehnt. Die letzte Ablehnung durch Spieler 2 muß optimal gewesen sein, d.h.

$$\beta(f|_{s^1,...,s^n}, g|_{s^1,...,s^n}) \gtrsim_2 (s^n, 0).$$

Nun kann das Hauptergebnis der Arbeit von Rubinstein formuliert werden. $pr_1 : [0,1]^2 \to [0,1]$ und $pr_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ sind die Projektionen auf die erste bzw. zweite Koordinate. Für das $\Delta \subset [0,1]^2$ in Lemma 4.7 sind $pr_1(\Delta) \subset [0,1]$ und $pr_2(\Delta) \subset [0,1]$ Punkte, falls Δ ein Punkt ist, und abgeschlossene Intervalle, falls Δ eine Strecke ist. Es sei

A := die Menge der Aufteilungen, die durch teilspielperfekte Gleichgewichte entstehen,

B := die Menge der Aufteilungen, die durch teilspielperfekte Gleichgewichte entstehen, wenn man die Rollen der Spieler vertauscht, d.h. wenn Spieler 2 das erste Angebot macht.

Teil (a) des Satzes 4.13 steht in [Ru82], Teil (b) ist eine kleine Erweiterung.

Theorem 4.13 *(a)*

$$pr_1(A) = pr_1(\Delta), \quad pr_1(B) = pr_2(\Delta).$$

(b) Falls (A-5) nicht gilt, ist

$$pr_1(A) = [\min(pr_1(\Delta)), \max(pr_1(\Delta))], \quad pr_1(B) = [\min(pr_2(\Delta)), \max(pr_2(\Delta))].$$

Der Beweis erfordert als Vorbereitung Theorem 4.15 und die Lemmata 4.17 und 4.18. Die Inklusion $\supset$ wird in Bemerkung 4.16 (ii) bewiesen. Die Inklusion $\subset$ wird nach Lemma 4.18 bewiesen.
Im Fall ohne (A-5) muß Δ nicht zusammenhängend sein, aber Δ und seine Projektionen $pr_1(\Delta)$ und $pr_2(\Delta)$ sind abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Daher sind die Intervalle in (b) wohldefiniert.

Bemerkungen 4.14 (i) Die Beispiele 4.8 (i) und (ii) illustrieren das Theorem. Im Beispiel 4.8 (i) und im Beispiel 4.8 (ii) in den Fällen $c_1 < c_2$ und $c_1 > c_2$ bestehen A und B jeweils nur aus einem Punkt a und b, und es ist $b_1 < a_1$.
(ii) Bemerkenswert ist auch, dass in den Definitionen der Mengen A und B und im Theorem nicht behauptet wird, dass die erreichten Aufteilungen sofort erreicht werden, dass also für ein realisierendes teilspielperfektes Gleichgewicht (f,g) $T(f,g) = 1$ gelten muß. Das gilt aber oft, zum Beispiel immer, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist, also insbesondere, wenn Δ und A und B jeweils nur aus einem Punkt bestehen. Denn wenn (f,g) ein teilspielperfektes Gleichgewicht mit $T(f,g) \geq 2$ ist, dann ist $s^{T(f,g)}$ nicht nur ein Element von A, sondern auch von B, also ist dann $A \cap B \neq \emptyset$.
(iii) In [Ru82] steht auf den Seiten 107 unten und 108 oben ein Beispiel eines teilspielperfekten Gleichgewichts mit $T(f,g) = 2$, das ich nicht verstehe. Ich glaube, ich habe ein eigenes Beispiel, aber es ist mühsam. Es wird hier nicht ausgeführt.

(iv) Im folgenden Theorem ist Teil (b) offensichtlich ein Spezialfall von Teil (a). Teil (b) ist aus [Ru82], Teil (a) ist eine ziemlich hübsche Verallgemeinerung für den Fall ohne (A-5). Theorem 4.15 gibt viele teilspielperfekte Gleichgewichte. Aber wegen (iii) gibt es Fälle, wo es andere teilspielperfekte Gleichgewichte gibt.

Theorem 4.15 *(a) Sei im Rubinstein-Spiel ohne (A-5) (f,g) eine Strategienpaar, und sei $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Aufteilungen $r^n \in S$, so dass (f,g) folgende Gestalt hat:*

$$\begin{array}{ll} \text{für ungerades } n: & \\ f^n(s^1,...,s^{n-1}) = r^n, & g^n(s^1,...,s^n) := \begin{cases} \text{Nein} & \text{falls } s_2^n < r_2^n \\ \text{Ja} & \text{falls } s_2^n \geq r_2^n \end{cases} \\ \text{für gerades } n: & \\ g^n(s^1,...,s^{n-1}) = r^n, & f^n(s^1,...,s^n) := \begin{cases} \text{Nein} & \text{falls } s_1^n < r_1^n \\ \text{Ja} & \text{falls } s_1^n \geq r_1^n \end{cases} \end{array}$$

Dann ist (f,g) genau dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn gilt:

$$\begin{array}{rl} \text{für ungerades } n & r^n = d_2(r^{n+1}), \\ \text{für gerades } n & r^n = d_1(r^{n+1}). \end{array}$$

(b) Im Rubinsteinspiel mit (A-5) sind die Bedingungen an $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (a) genau dann erfüllt, wenn ein Paar $(a,b)\in\Delta$ mit

$$a = r^n \text{ für ungerades } n \text{ und } b = r^n \text{ für gerades } n$$

existiert.

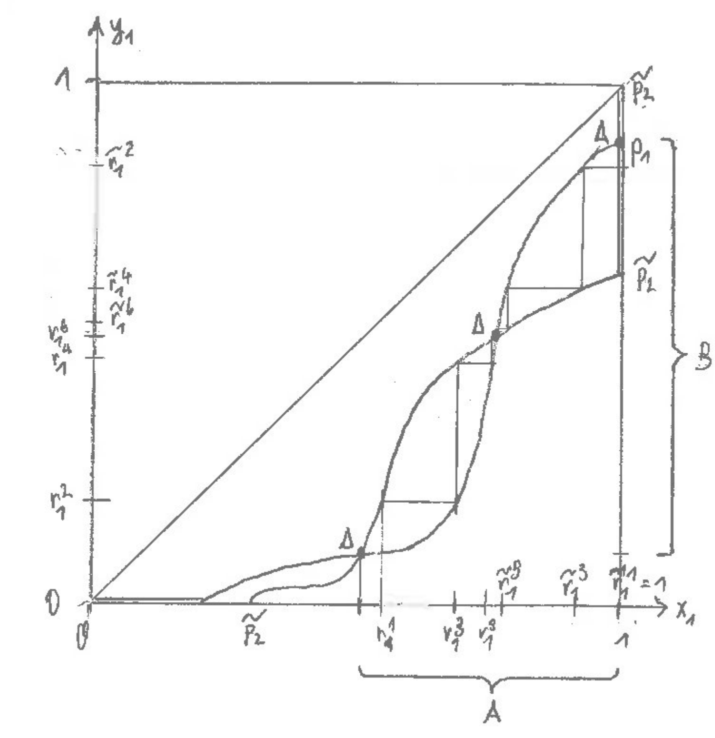
Beweis: (a) Sei n ungerade. Dann ist

$$\begin{array}{l} (r^n,n) \gtrsim_2 (r^{n+1},n+1) >_2 (r^{n+2},n+2), \\ (r^n,n) >_1 (r^{n+1},n+1) \gtrsim_1 (r^{n+2},n+2), \end{array}$$

und (r^n,n) ist für Spieler 1/2 das beste/schlechteste Ergebnis in Runde n mit $(r^n,n) \gtrsim_2 (r^{n+1},n+1)$. Wenn Spieler 2 gemäß seiner Strategie spielt, kann Spieler 1 mit keinem Angebot als r^n ein besseres Ergebnis als (r^n,n) erzielen. Denn das Angebot r^n wird angenommen, daher ist es sinnlos für Spieler 1, ein für ihn schlechteres Angebot zu machen. Und ein für Spieler 1 besseres Angebot würde abgelehnt werden. Dann würde bestenfalls das für Spieler 1 schlechtere Ergebnis $(r^{n+1},n+1)$ herauskommen.
Im Fall $r_2^n > 0$ ist $(r^n,n) \sim_2 (r^{n+1},n+1)$. Dann ist die Haltung von Spieler 2, ein Angebot s^n mit $s_2^n \geq r_2^n$ anzunehmen und ein Angebot s^n mit $s_2^n < r_2^n$ abzulehnen, optimal. Im Fall $r_2^n = 0$ ist $(r^n,n) \gtrsim_2 (r^{n+1},n+1)$. Dann existiert

nur der Fall von Angeboten s^n mit $s_2^n \geq r^n$, und dann ist es richtig, alle Angebote anzunehmen.
Das war die (etwas informelle) Diskussion zu (Ang-1) und (Ja-2) und (Nein-2) in Definition 4.12 (b). Die anderen Fälle (Ang-2) und (Ja-1) und (Nein-1) sind analog.
(b) wird in der Bemerkung 4.16 (v) bewiesen. □

Bemerkungen 4.16 (i) Die Bedingungen $r^n = d_2(r^{n+1})$ für ungerades n und $r^n = d_1(r^{n+1})$ für gerades n sind äquivalent zu $r_1^n = \widetilde{p}_2(r_1^{n+1})$ für ungerades n und $r_1^n = p_1(r_1^{n+1})$ für gerades n. Das folgende Bild zeigt zugleich 2 Folgen $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{r}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Fall eines Rubinstein-Spiels ohne (A-5). Für ungerades n sind die r^n und die $\widetilde{r}^n$ auf der x_1-Achse, für gerades n sind sie auf der y_1-Achse. Für ungerades n liegen die Punkte (r^n, r^{n+1}) und $(\widetilde{r}^n, \widetilde{r}^{n+1})$ auf dem Graphen von $\widetilde{p}_2$ (mit der y_1-Achse als Definitionsbereich und der x_1-Achse als Wertebereicht). Für gerades n liegen die Punkte (r^{n+1}, r^n) und $(\widetilde{r}^{n+1}, \widetilde{r}^n)$ auf dem Graphen von p_1.
Man sieht, dass beide Folgen zu einem Punkt in Δ konvergieren (im Beispiel zufällig der gleiche Punkt).



(ii) Bei einem teilspielperfekten Gleichgewicht (f, g) wie in Theorem 4.15 (a) ist $r^1 \in A$ und $r^2 \in B$. Denn $\beta(f, g) = (r^1, 1)$ und $\beta(f|_{s^1}, g|_{s^1}) = (r^2, 1)$ ($s^1 \in S$ ist beliebig). Daher zeigt das Bild auch einen Teil von Theorem 4.13 (b), nämlich

$$pr_1(A) \supset [\min(pr_1(\Delta)), \max(pr_1(\Delta)], \quad pr_1(B) \supset [\min(pr_2(\Delta)), \max(pr_2(\Delta))].$$

Es bleibt nur noch, jeweils $\subset$ zu beweisen. Das wird aber die Lemmata 4.17 und 4.18 erfordern. Sie sind aus [Ru82].
(iii) Wenn Theorem 4.15 (a) stärker wäre und auch sagen würde, dass es nur die dort beschriebenen teilspielperfekten Gleichgewichte gäbe, dann würde aus dem Bild das ganze Theorem 4.13 (b) folgen, also =. Denn bei r_1 außerhalb des Intervalls würde man nur endlich viele der Werte $r_2, r_3, ...$ in erlaubter Weise wählen können. Leider gibt es nach Bemerkung 4.14 (iii) im allgemeinen wohl noch andere teilspielperfekte Gleichgewichte. Daher brauchen wir Rubinsteins Lemmata 4.17 und 4.18.
(iv) Theorem 4.13 (a) ist ein Spezialfall von Theorem 4.13 (b) und muß nicht extra bewiesen werden.
(v) Im Fall eines Rubinstein-Spiels mit (A-5) hat man keine *Blasen* wie im Bild oben zwischen den Graphen von p_1 und $\widetilde{p}_2$ (mit vertauschten Achsen). In dem Fall sind in allen Folgen $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Theorem 4.15 (a) die Teilfolgen $(r^n)_{n \text{ ungerade}}$ und $(r^n)_{n \text{ gerade}}$ konstant, und für ungerades n ist $(r^n, r^{n+1}) \in \Delta$. Das beweist Theorem 4.15 (b).

Lemma 4.17 *(a) Sei $a \in A$. Für alle $b \in S$ mit $b_1 > a_1$ gibt es ein $c \in B$ mit $(c,1) \gtrsim_2 (b,0)$.*
(b) Sei $a \in B$. Für alle $b \in S$ mit $b_2 > a_2$ gibt es ein $c \in A$ mit $(c,1) \gtrsim_1 (b,0)$.

Beweis: (a) Zuerst die Idee: Wenn die Aufteilung a Ergebnis eines teilspielperfekten Gleichgewichts ist, muß es einen Grund dafür geben, dass Spieler 1 nicht in der ersten Runde b fordert. Der Grund kann nur sein, dass Spieler 2 b dann ablehnen kann, weil er danach im Rahmen eines teilspielperfekten Gleichgewichts ein für ihn mindestens so gutes Ergebnis $(c,1) \gtrsim_2 (b,0)$ erreichen kann.
Nun der formale Beweis: Sei (f,g) ein teilspielperfektes Gleichgewicht mit $s^{T(f,g)} = a$. Sei $b \in S$ mit $b_1 > a_1$. Wegen (Ang-1) ist $g^1(b) =$ Nein, denn sonst wäre für $\widetilde{f}$ mit $\widetilde{f}^1 = b$

$$\beta(\widetilde{f}, g) = (b,1) >_1 (a,1) \gtrsim_1 (a, T(f,g)) = \beta(f,g).$$

(Nein-2) sagt, dass diese Ablehnung durch Spieler 2 optimal gewesen sein muß, also

$$\beta(f|_b, g|_b) \gtrsim_2 (b,0).$$

Insbesondere erfüllt $c := s^{T(f|_b, g|_b)}$

$$(c,1) \gtrsim_2 (c, T(f|_b, g|_b)) = \beta(f|_b, g|_b) \gtrsim_2 (b,0).$$

Weil (f,g) ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, ist auch $(f|_b, g|_b)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht, diesmal vom Spiel, wo Spieler 2 das erste Angebot macht. Daher ist $c \in B$.
(b) folgt aus (a) durch Vertauschen der Rollen der Spieler 1 und 2. $\square$

Lemma 4.18 *(a) Sei $a \in A$. Für alle $b \in S$ mit $(b,1) >_2 (a,0)$ gibt es ein $c \in A$ mit $(c,1) \gtrsim_1 (b,0)$.*
(b) Sei $a \in B$. Für alle $b \in S$ mit $(b,1) >_1 (a,0)$ gibt es ein $c \in B$ mit $(c,1) \gtrsim_2 (b,0)$.

Beweis: Zuerst die Idee: Wenn die Aufteilung a Ergebnis eines teilspielperfekten Gleichgewichts ist, muß es einen Grund dafür geben, dass Spieler 2 nicht in der letzten Runde a ablehnen und erfolgreich mehr für sich fordern kann, nämlich b. Der Grund kann nur sein, dass Spieler 1 b dann ablehnen kann, weil er danach im Rahmen eines teilspielperfekten Gleichgewichts ein für ihn mindestens so gutes Ergebnis $(c,1) \gtrsim_1 (b,0)$ erreichen kann.
Nun der formale Beweis: Sei (f,g) ein teilspielperfektes Gleichgewicht mit $s^{T(f,g)} = a$. Sei $b \in S$ mit $(b,1) >_2 (a,0)$. Wir müssen 2 Fälle unterscheiden.

Fall $g(f^1) =$ **Nein:** Dann ist $T(f,g) \geq 2$, und dann hat auch das teilspielperfekte Gleichgewicht $(f|_{f^1}, g|_{f^1})$ das Ergebnis $(a, T(f|_{f^1}, g|_{f^1})) = (a, T(f,g) - 1)$. Daher ist dann a auch in B. Wegen $(b,1) >_2 (a,0)$ ist $b_2 > a_2$. Lemma 4.17 (b) gibt ein $c \in A$ mit $(c,1) \gtrsim_1 (b,0)$.

Fall $g(f^1) =$ **Ja:** Dann ist $f^1 = a$ und $\beta(f,g) = (a,1)$. Wenn nun Spieler 2 $f^1 = a$ ablehnen und b fordern würde, würde Spieler 1 ablehnen, in Formeln: $f^2(a,b) =$ Nein. Denn andernfalls wäre Spieler 2 mit der Forderung b erfolgreich, dann wäre für ein $\widetilde{g}$ mit $\widetilde{g}^1 = b$

$$\beta(f|_a, \widetilde{g}) = (b,1) >_2 (a,0),$$

und dann wäre (Ja-2) verletzt: die vorherige Antwort $g(f^1) =$ Ja wäre falsch gewesen.
Dass Spieler 1 das Angebot b ablehnt, muss optimal sein, (Nein-1) sagt

$$\beta(f|_{a,b}, g|_{a,b}) \gtrsim_1 (b,0).$$

Sei c das Ergebnis des teilspielperfekten Gleichgewichts $(f|_{a,b}, g|_{a,b})$. Dann ist erstens $c \in A$ und zweitens

$$(c,1) \gtrsim_1 (c, T(f|_{a,b}, g|_{a,b})) = \beta(f|_{a,b}, g|_{a,b}) \gtrsim_1 (b,0),$$

also tut's dieses c.
(b) folgt aus (a) durch Vertauschen der Rollen der Spieler 1 und 2. □

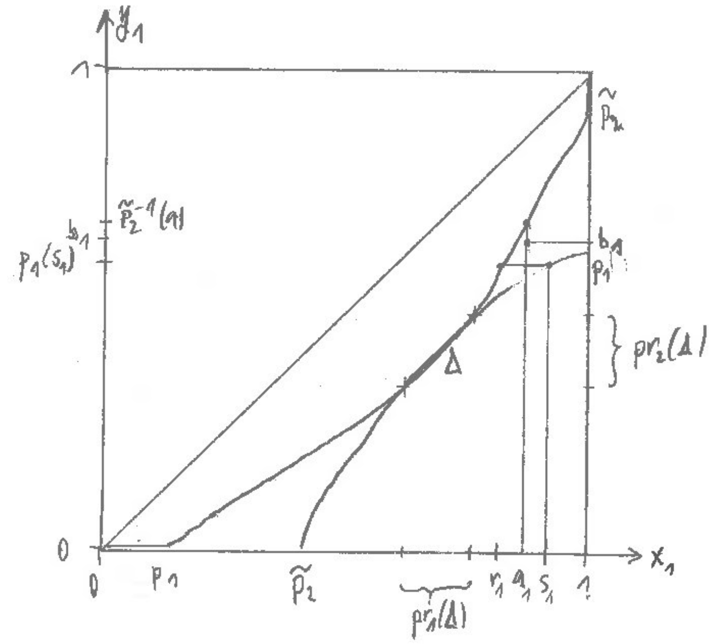
Beweis der Inklusionen $\subset$ in Theorem 4.13 (b): Es ist zu zeigen

$$\begin{aligned}
\sup(a_1 \in pr_1(A)) &\leq \max(pr_1(\Delta)),\\
\inf(a_1 \in pr_1(B)) &\geq \min(pr_2(\Delta)),\\
\inf(a_1 \in pr_1(A)) &\geq \min(pr_1(\Delta)),\\
\sup(a_1 \in pr_1(B)) &\leq \max(pr_2(\Delta)).
\end{aligned}$$

Mit $\supset$ in Bemerkung 4.16 (ii) folgt überall $=$.
Indirekter Beweis des ersten Falls. Annahme: Sei

$$s_1 := \sup(a_1 \in A) > \max(pr_1(\Delta)).$$

Dann ist $r_1 := \widetilde{p}_2(p_1(s_1)) < s_1$, siehe das Bild. Es gibt ein $a_1 \in A$ mit $r_1 < a_1 \leq s_1$. Es gibt ein $b_1 \in [0,1]$ mit $p_1(s_1) < b_1 < \widetilde{p}_2^{-1}(a_1)$. Dann ist $a_1 > \widetilde{p}_2(b_1)$ und $(b,1) >_2 (a,0)$.



Wegen Lemma 4.18 (a) gibt es ein $c_1 \in A$ mit $(c,1) \gtrsim_1 (b,0)$. Es erfüllt $p_1(c_1) \geq b_1 > p_1(s_1)$. Weil p_1 monoton wachsend ist, folgt daraus $c_1 > s_1$, ein Widerspruch zur Definition von s_1.
Dieser indirekte Beweis hat $\sup(a_1 \in A) \leq \max(pr_1(\Delta))$ gezeigt. Durch Vertauschen der Rollen der Spieler 1 und 2 folgt analog

$$\inf(b_1 \in B) \geq \min(pr_2(\Delta)).$$

Nun wird $\inf(a_1 \in A) \geq \min(pr_1(\Delta))$ gezeigt. Sei $a_1 \in A$. Sei $b_1 > a_1$. Wegen Lemma 4.17 (a) gibt es ein $c_1 \in B$ mit $(c,1) \gtrsim_2 (b,0)$, also $\widetilde{p}_2(c_1) \leq b_1$. Daraus folgt $\inf(\widetilde{p}_2(c_1) \,|\, c_1 \in B) \leq a_1$. Es ist aber

$$\inf(\widetilde{p}_2(c_1) \,|\, c_1 \in B) = \widetilde{p}_2(\inf(c_1 \in B)) = \widetilde{p}_2(\min(pr_2(\Delta)) = \min(pr_1(\Delta)).$$

Analog zeigt man mit Lemma 4.17 (b) $\sup(b_1 \in B) \leq \max(pr_2(\Delta))$. $\square$

Hier sind die Arbeit von Rubinstein 1982 und 4 Lehrbücher der Spieltheorie, die alle etwas zum Rubinstein-Spiel schreiben.

Literatur

[BEG10] S.K. Berninghaus, K.-M. Ehrhart, W. Güth: Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie. Springer, 3. Auflage 2010.

[Da91] E. van Damme: Stability and perfection of Nash equilibria. Springer-Verlag, 2nd edition, 1991.

[GGF10] J. González-Diaz, I. García-Jurado, M.G. Fiestras-Janeiro: An introductory course on mathematical game theory. Graduate Studies in Mathematics vol. **115**, American Mathematical Society, 2010.

[HoIl09] M.J. Holler, G. Illing: Einführung in die Spieltheorie. Springer, 7. Auflage 2009.

[Ru82] A. Rubinstein: Perfect equilibria in a bargaining model. Econometrica **50.1** (1982), 97–109.