1. Klausur zur Geometrie im FSS 2016

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 60 Minuten. Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden. Insgesamt kann man 24 Punkte erreichen.

Bitte schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, auf dem sie nicht schon vorgedruckt sind.

Bitte lassen Sie zwischen Ihren Lösungen der Aufgaben ausreichend Platz.

Diese Aufgabenstellung hat (inklusive dieser Deckseite) 3 Seiten.

1. *(2+1 Punkte)*

   (a) Geben Sie die Definition eines *affinen Raums* an.

   (b) Geben Sie die Definition einer *affinen Abbildung* an.

2. *(2 Punkte)* Formulieren Sie den *orientierten Strahlensatz.*

3. *(1+4 Punkte)*

   (a) Machen Sie eine Skizze eines Dreiecks mit Ecken A, B, C, Seiten(längen) a, b, c und Winkeln α, β, γ. Und formulieren Sie eine der drei Gleichungen des Kosinussatzes.

   (b) Geben Sie 4 verschiedene Bedingungen dafür an, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Bei den Bedingungen soll man nichts weglassen dürfen. Sie sollen als Gleichheit von gewissen Längen oder Winkeln formuliert sein. Machen Sie ohne Kommentar zu jeder Bedingung eine kleine, aber aussagekräftige Skizze.

4. *(2 Punkte)* Die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/10}$ erfüllt $0 = \zeta^5 + 1 = (\zeta + 1)(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1)$, wegen $\zeta + 1 \neq 0$ also auch $0 = \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1$. Und natürlich ist $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{10}$.

   Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ ab, die von $2\cos\frac{2\pi}{10}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $2\cos\frac{2\pi}{10}$ aus.

   Bemerkungen: Wegen dieser Formel kann man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Zahl $2\cos\frac{2\pi}{10}$ heißt goldener Schnitt.

5. *(1+1 Punkte)*

   (a) Es gibt 7 Klassen von Isometrien des affinen Raums $\mathbb{R}^3$, 4 haben Fixpunkte, 3 haben keine Fixpunkte. Geben Sie ihre Namen und ihre Fixpunktmengen an.

   (b) Wie heißen die diskreten Untergruppen von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, deren Translationsgruppen isomorph zu $\mathbb{Z}^3$ sind, und wieviele Ähnlichkeitsklassen gibt es?

6. *(1+1+1 Punkte)* Die Menge der Punkte der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell ist die obere Halbebene $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$.

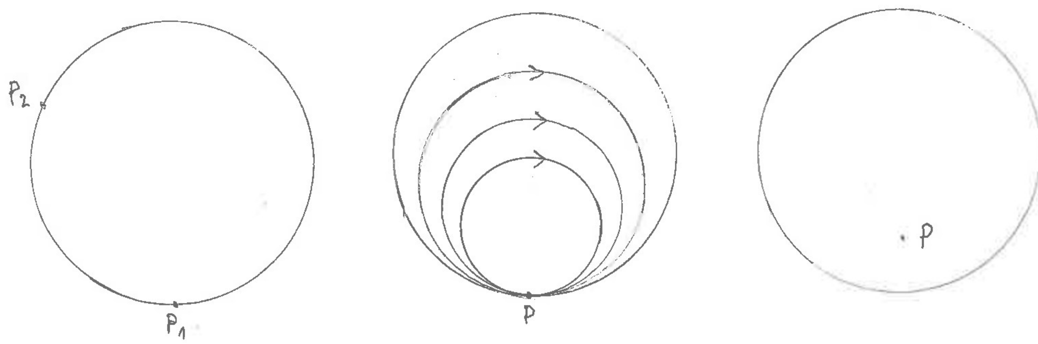
   (a) Geben Sie die Definition einer hyperbolischen Geraden im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene an.

   (b) Geben Sie die Formel an, die bei einem hyperbolischen Dreieck Δ seine Fläche und die Summe der Innenwinkel verbindet.

   (c) Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie für den hyperbolischen Kreis $\mathcal{K}$ mit hyperbolischem Radius r und hyperbolischem Mittelpunkt $z_0 = i \in \mathbb{H}^2$ (also im Poincaré-Modell) den euklidischen Radius R und den euklidischen Mittelpunkt M.

   Hinweis: $d_{\mathbb{H}}(i, t \cdot i) = |\log t|$ für $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

7. *(2 Punkte)* Die orientierungserhaltenden Isometrien des Scheibenmodells $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ der hyperbolischen Ebene sind die gebrochen linearen Transformationen auf $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die $\mathbb{D}^2$ auf sich abbilden. Sie sind winkeltreu und erhalten die verallgemeinerten (euklidischen) Kreise. Es gibt drei Typen: Die *parabolischen Transformationen* haben einen Fixpunkt P auf dem Rand S^1 und keinen in $\mathbb{D}^2$, ein anderer Typ hat zwei Fixpunkte P_1 und P_2 auf dem Rand S^1 und keinen in $\mathbb{D}^2$, der dritte Typ hat einen Fixpunkt P in $\mathbb{D}^2$ und keinen auf dem Rand S^1. Das mittlere der drei folgenden Bilder zeigt 3 (euklidische) Kreise, die durch eine parabolische Transformation jeweils auf sich abgebildet werden.



Geben Sie die Namen der anderen beiden Typen an, kopieren sie das linke und das rechte der drei Bilder und tragen Sie jeweils die Anteile in $\mathbb{D}^2$ von 3 euklidischen Kreisen ein, die durch die Transformationen mit den eingezeichneten Fixpunkten (P_1 und P_2 bzw. P) auf sich abgebildet werden.

8. *(1+1 Punkte)* Neben der euklidischen Geometrie (auf $\mathbb{R}^2$) und der hyperbolischen Geometrie (auf $\mathbb{H}^2$ oder $\mathbb{D}^2$) gibt es eine *sphärische Geometrie* auf der Einheitssphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Die *sphärischen Geraden* auf S^2 sind die *Großkreise*, das sind die Schnitte von S^2 mit Ebenen durch $0 \in \mathbb{R}^3$. Ein *sphärisches Dreieck* ist durch Stücke von 3 sphärischen Geraden begrenzt. Die Flächen von sphärischen Dreiecken sind einfach die Oberflächen von ihnen als (gekrümmte) Flächen im $\mathbb{R}^3$. Die Sphäre S^2 hat die Fläche 4π.

   (a) Es gibt eine Formel, die die Innenwinkelsumme eines sphärischen Dreiecks mit seiner Fläche verbindet. Raten Sie sie.

   (b) Gilt in der sphärischen Geometrie das Parallelenaxiom? Was gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

9. *(3 Punkte)* Satz vom Winkelhalbierendenschnittpunkt: *Die drei Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

   Beweisen Sie diesen Satz und machen Sie eine Skizze zu Ihrem Beweis.

Viel Erfolg !