Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Falko Gauß

1. Klausur
15.06.2016

Lösungen zur 1. Klausur zur Geometrie im FSS 2016

1. *(2+1 Punkte)*

   (a) Ein affiner Raum ist ein Tripel $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_{\mathcal{A}})$. Hier ist $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge, $T(\mathcal{A})$ ist ein K-Vektorraum, und

   $$\begin{array}{rcl} \varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & T(\mathcal{A}) \\ (x, y) & \mapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}$$

   ist eine Abbildung mit den folgenden zwei Eigenschaften:

   $$(i) \quad \forall\, x, y, z \in \mathcal{A} \quad \text{ist} \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

   (ii) Für jeden Punkt $p \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

   $$\varphi_{\mathcal{A},p} =: \varphi_{\mathcal{A}}(p, .) : \mathcal{A} \to T(\mathcal{A}), \quad x \mapsto \overrightarrow{px},$$

   bijektiv.

   (b) Eine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *affine Abbildung*, falls es eine lineare Abbildung $T(f) : T(\mathcal{A}) \to T(\mathcal{B})$ mit

   $$\forall\, x, y \in \mathcal{A} \quad \overrightarrow{f(x)f(y)} = T(f)(\overrightarrow{xy})$$

   gibt.

2. *(2 Punkte)* Sind zwei Geraden G_1, G_2 im $\mathbb{R}^2$ mit Scheitel $G_1 \cap G_2 = \{S\}$ und zwei beliebige Geraden G_1^*, G_2^* mit den Schnittpunkten

   $$G_\alpha \cap G_1^* = \{P_\alpha\}, \quad G_\alpha \cap G_2^* = \{Q_\alpha\} \text{ für } \alpha = 1, 2$$

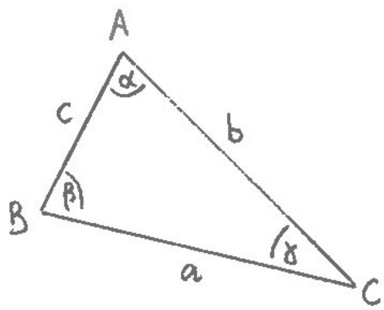
   gegeben, so gilt für die Teilungsverhältnisse

   $$\frac{SP_1}{SQ_1} = \frac{SP_2}{SQ_2}$$

   genau dann, wenn G_1^* und G_2^* parallel sind.

3. *(1+4 Punkte)*

(a)



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

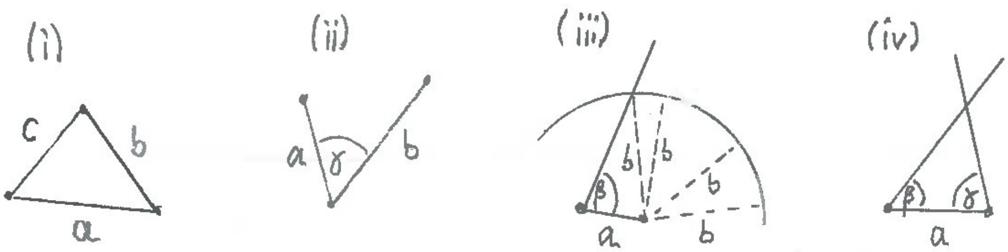
(b) Zwei Dreiecke sind kongruent, falls eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist.

(i) Die Längen ihrer 3 Seiten stimmen paarweise überein.

(ii) Die Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel stimmen überein (SWS-Satz).

(iii) Die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein.

(iv) Die Länge einer Seite und die beiden daran anliegenden Winkel stimmen überein (WSW-Satz).



4. *(2 Punkte)* Sei $g := 2\cos\frac{2\pi}{10} = \zeta + \zeta^{-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} g^2 &= (\zeta + \zeta^{-1})^2 = \zeta^2 + 2 + \zeta^{-2}, \qquad \text{also} \\ g^2 - g - 1 &= \zeta^2 - \zeta + 1 - \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = \zeta^{-2}(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1) = \zeta^{-2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Daher ist g eine der beiden Lösungen $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 - 4(-1)}$ der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1$. Wegen $g > 0$ ist es die Lösung

$$g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. *(1+1 Punkte)*

   (a) .

id	$\mathbb{R}^3$
Spiegelung	eine Ebene
Drehung	eine Gerade
Drehspiegelung	ein Punkt
Translation	$\emptyset$
Gleitspiegelung	$\emptyset$
Schraubung	$\emptyset$

   (b) Kristallographische Gruppen. Es gibt 230 Ähnlichkeitsklassen.

6. *(1+1+1 Punkte)*

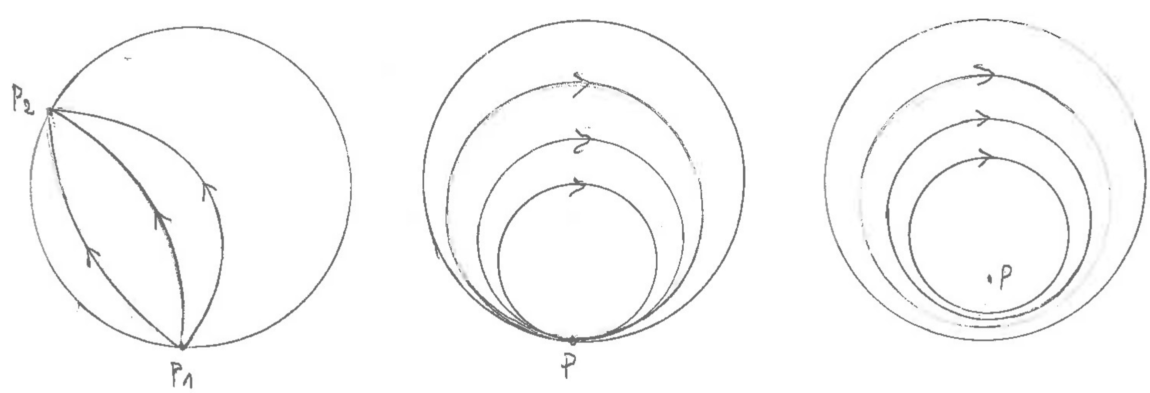
   (a) Eine hyperbolische Gerade im Poincaré-Modell $\mathbb{H}^2$ der hyperbolischen Ebene ist der in $\mathbb{H}^2$ liegende Teil eines zum Rand $\mathbb{R}$ von $\mathbb{H}^2$ orthogonalen verallgemeinerten Kreises.

   (b)
$$\text{Fläche}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

   (c) Aus Symmetriegründen liegt der euklidische Mittelpunkt M des Kreises $\mathcal{K}$ auf der (euklidischen) Halbgeraden $i \cdot \mathbb{R}_{>0}$. Es gibt eindeutige positive reelle Zahlen t_1 und t_2 mit $t_1 < 1 < t_2$ und $\mathcal{K} \cap i \cdot \mathbb{R}_{>0} = \{it_1, it_2\}$. Es ist

$$\begin{aligned} r &= d_{\mathbb{H}}(i, it_1) = \log \frac{1}{t_1}, &&\Rightarrow t_1 = e^{-r}, \\ r &= d_{\mathbb{H}}(i, it_2) = \log t_2, &&\Rightarrow t_2 = e^{r}, \\ R &= \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r}) = \sinh(r), \\ M &= i \cdot \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = i \cdot \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}) = i \cdot \cosh(r). \end{aligned}$$

7. *(2 Punkte)* Die hyperbolischen Transformationen haben je 2 Fixpunkte auf S^1, die elliptischen Transformationen haben je 1 Fixpunkt in $\mathbb{D}^2$.



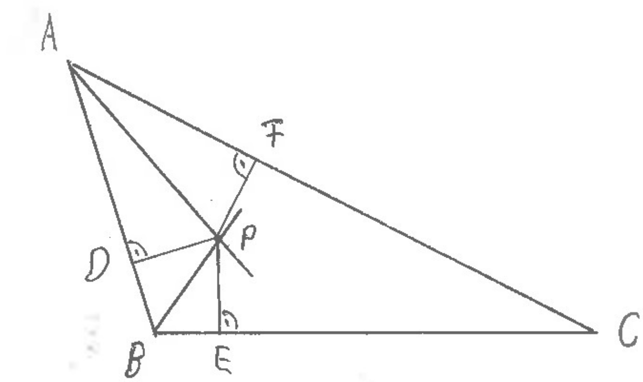
8. *(1+1 Punkte)*

   (a) Sei Δ ein sphärisches Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und γ. Dann gilt

   $$\text{Fläche}(\Delta) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

   (b) Das Parallelenaxiom gilt nicht. Es gibt durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden keine Parallele. Denn je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in 2 Punkten.

9. *(3 Punkte)*



Sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch die Ecken A und B. Seien D, E und F die Schnittpunkte der Lote von P auf die Seiten AB, BC und CA.

Die Dreiecke $\Delta(A, F, P)$ und $\Delta(A, D, P)$ sind kongruent, denn die Winkel stimmen überein, und sie haben die Seite AP gemeinsam. Daher ist $d(D, P) = d(F, P)$.

Die Dreiecke $\Delta(B, D, P)$ und $\Delta(B, E, P)$ sind kongruent, denn die Winkel stimmen überein, und sie haben die Seite BP gemeinsam. Daher ist $d(D, P) = d(E, P)$.

Die Dreiecke $\Delta(E, C, P)$ und $\Delta(F, C, P)$ haben die Seite PC gemeinsam, es gilt $d(E, P) = d(D, P) = d(F, P)$, und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel ist jeweils $\pi/2$. Daher sind die Dreiecke kongruent. Daher ist die Seite PC Teil der Winkelhalbierenden durch C. Daher ist P der Schnittpunkt aller drei Winkelhalbierenden.