Übungsaufgaben zur Geometrie

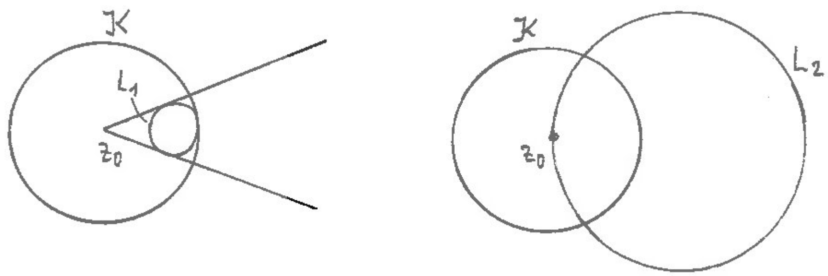
1. *(1+2 Punkte)*

   (a) Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Die Inversion $S_{\mathcal{K}} : \mathbb{C}-\{z_0\} \to \mathbb{C}-\{z_0\}$ am Kreis $\mathcal{K}$ bildet jeden Punkt $z \in \mathbb{C}-\{z_0\}$ auf einen Punkt z^* ab. z^* ist dadurch bestimmt, dass z und z^* auf der gleichen Halbgeraden liegen, die in z_0 anfängt, und dass sie eine bestimmte Gleichung erfüllen.

   Geben Sie die Gleichung an.

   (b) Die folgenden beiden Skizzen zeigen jeweils $\mathcal{K}$ und einen zweiten Kreis L_1 bzw. L_2. Die erste Skizze zeigt auch 2 Halbgeraden.

   Kopieren Sie die Skizzen auf ein Lösungsblatt und tragen Sie die (oder aussagekräftige Teile von ihnen) verallgemeinerten Kreise $S_{\mathcal{K}}(L_1)$ bzw. $S_{\mathcal{K}}(L_2)$ ein.



2. *(5 Punkte)* Einen *Kegelstumpf* $KS(r_1, r_2, h)$ erhält man aus einem Kegel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius r_2 (in der (x, y)-Ebene) und Höhe h_2 (in der z-Richtung), indem man einen kleineren Teilkegel mit Radius $r_1 < r_2$ und Höhe $h_1 < h_2$ (natürlich mit $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1}$) wegläßt. Dann ist $h = h_2 - h_1$. Die Oberfläche des Kegelstumpfs ist

$$2\pi\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Sei nun C in der (y, z)-Ebene eine Kurve ohne Selbstüberschneidung, die durch eine C^∞-Abbildung $(y, z) : [a, b] \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ parametrisiert ist. Aus dieser Kurve C erhält man die Rotationsfläche $F(C)$ mit Parametrisierung

$$F(C) := \{(\sin\varphi \cdot y(t), \cos\varphi \cdot y(t), z(t)) \,|\, t \in [a, b], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Leiten Sie aus der Formel für die Oberfläche eines Kegelstumpfs und mit Hilfe einer Approximation der Kurve C durch einen Polygonzug eine Formel für die Oberfläche der Rotationsfläche $F(C)$ her.

3. *(2+5+2 Punkte)* Ein *Polytop* ist ein Durchschnitt im $\mathbb{R}^3$ von endlich vielen Halbräumen, sofern dieser Durchschnitt beschränkt ist. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} & e & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops,} \\ \text{für } s \in \mathbb{N}_{\geq 3} & e_s & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops, von denen } s \text{ Kanten ausgehen,} \\ & k & := & \text{die Anzahl der Kanten des Polytops,} \\ & f & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops,} \\ \text{für } t \in \mathbb{N}_{\geq 3} & f_t & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops, die } t \text{ Ecken haben.} \end{array}$$

(a) Formulieren Sie 3 Formeln (ohne Beweise): die Eulersche Polyederformel; eine Formel, die k und das Tupel $(e_s)_{s\geq 3}$ verbindet; eine Formel, die k und das Tupel $(f_t)_{t\geq 3}$ verbindet.

(b) Die 5 platonischen Körper sind seit über 2000 Jahren bekannt. Jeder sollte sie kennen. Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Es gibt jeweils nur ein s mit $e_s \neq 0$ und nur ein t mit $f_t \neq 0$.

s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
					Tetraeder
					Würfel = Hexaeder
					Oktaeder
					Dodekaeder
					Ikosaeder

(c) Aus dem Ikosaeder erhält man durch geeignetes Abschneiden von Umgebungen der Ecken das *abgestumpfte Ikosaeder*, ein *archimedisches Polytop*, dessen Polygonflächen regelmäßige Fünfecke und Sechsecke sind. Geben Sie f_5, f_6, k und alle s und e_s mit $e_s \neq 0$ an.

4. *(3+3 Punkte)* Hier wird der $\mathbb{R}^3$ mit dem Spaltenvektorraum $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ identifiziert. Dann operieren Matrizen in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ durch Linksmultiplikation auf $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$SO(3) = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$$

die Gruppe der Drehungen des $\mathbb{R}^3$ mit Drehachsen durch 0. Außer bei $\mathrm{id} = \mathbf{1}_3$ sind die Drehachsen genau die Eigenräume mit Eigenwert 1 der Drehungen.

Die 5 Platonischen Körper werden so in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet, dass ihr Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Dann ist für jeden Platonischen Körper die Gruppe der Drehungen, die ihn auf sich abbilden (d.h. die ihn *invariant* lassen), eine endliche Untergruppe von $SO(3)$.

Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe $\mathcal{O}$ der „orientierungserhaltenden Symmetrien“ des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

$X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,

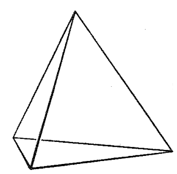
$Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
$-$	$-$	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	6
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

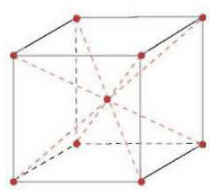
$\Rightarrow |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$

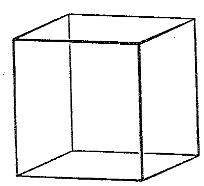
(a) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{T}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Tetraeders und bestimmen Sie $|\mathcal{T}|$.

(b) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{I}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Dodekaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.

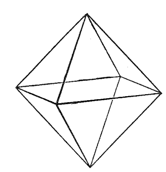


Tetraeder

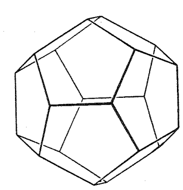




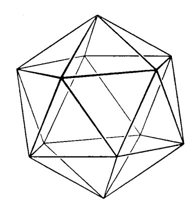
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

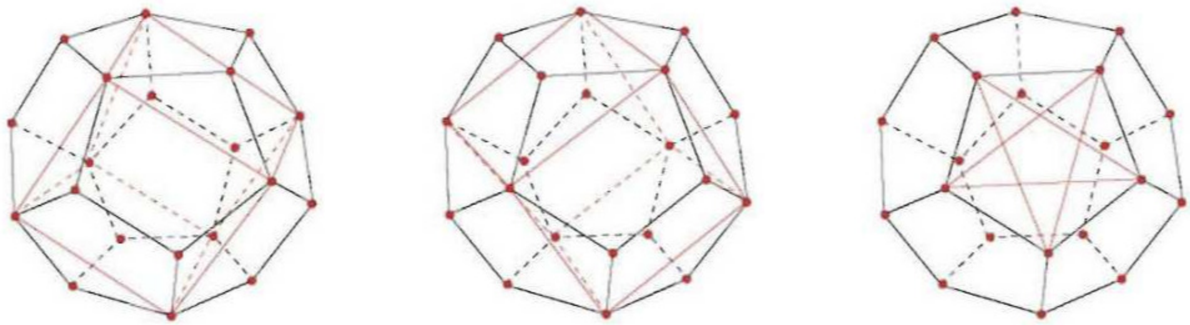
Bemerkung: Es gilt

$$\mathcal{T} \cong A_4, \quad \mathcal{O} \cong S_4, \quad \mathcal{I} \cong A_5.$$

Bei $\mathcal{T}$ werden die 4 Ecken permutiert. Man überprüft leicht, dass die Drehungen genau die geraden Permutationen geben.

Bei $\mathcal{O}$ muß man die Operation auf den 4 Raumdiagonalen im Würfel ansehen. Jedes Element von $\mathcal{O}$ permutiert diese. Wegen $|\mathcal{O}| = 24 = |S_4|$ wird jede Permutation als Drehung realisiert.

Bei $\mathcal{I}$ muß man zuerst einmal wissen und verstehen, dass es im Dodekaeder genau 5 regelmäßige Würfel gibt, deren Ecken Ecken des Platonischen Körpers sind. Diese werden durch die Drehungen in $\mathcal{I}$ permutiert. Es erfordert aber noch Anstrengung zu sehen, dass genau die geraden Permutationen realisiert werden.



5. *(3+3 Punkte)* Hier wird der $\mathbb{R}^2$ mit dem Spaltenvektorraum $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ identifiziert. Dann operieren Matrizen in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ durch Linksmultiplikation auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$SO(2) = \{A \in SL(2, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$

die Gruppe der Drehungen d_α um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ und mit Mittelpunkt 0. Und die Gruppe

$$\begin{aligned} O(2) &= SO(2) \cup SO(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \overset{\text{(als Menge)}}{\approx} S^1 \cup S^1 \end{aligned}$$

enthält neben den Drehungen auch die Spiegelungen s_v an Geraden $\mathbb{R}\cdot v$ mit $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Bei $O(2)$ parametrisiert die eine S^1 die Drehungswinkel der Drehungen, und die andere S^1 parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen.

Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht, sondern es gilt die Beziehung

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$

(a) Beweisen Sie diese Formel und machen Sie eine Skizze dazu.

(b) Vervollständigen Sie (ohne Beweis) die folgende Tabelle zur Gruppenstruktur von $O(2)$. Der Winkel zwischen w und v soll γ genannt werden (also ist $-\gamma$ der Winkel zwischen v und w).

$\circ$	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$	$s_v \circ s_w = d_{\dots}$

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 4 in der Übung am 25.04.2016