Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Falko Gauß

Blatt 3
14.03.2016

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(4 Punkte)* Geben Sie 4 verschiedene Bedingungen dafür an, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Bei den Bedingungen soll man nichts weglassen dürfen. Sie sollen als Gleichheit von gewissen Längen oder Winkeln formuliert sein. Machen Sie ohne Kommentar zu jeder Bedingung eine kleine, aber aussagekräftige Skizze.

2. *(2 Punkt)* Tragen Sie in der 2. Spalte der folgenden Tabelle in jeder der 4 Zeilen *ja, schwer* oder *ja, leicht* oder *nein* ein. Tragen Sie in der 3. Spalte in jeder der 4 Zeilen ein Minuszeichen oder *Inkreis* oder *Umkreis* ein. Die Tabelle soll danach stimmen.

Satz vom ...	Beweis mit dem Satz von Ceva?	Inkreis? Umkreis?
Winkelhalbierendenschnittpunkt		
Seitenhalbierendenschnittpunkt		
Höhenschnittpunkt		
Mittelsenkrechtenschnittpunkt		

3. *(3 Punkte)* Gegeben seien ein Dreieck $\Delta(A,B,C)$ und ein Punkt P im Inneren des Dreiecks. Es werden die Geraden $G(A,P)$, $G(B,P)$ und $G(C,P)$ betrachtet. Die Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden Seiten werden A', B' und C' genannt. Zeigen Sie

$$\frac{|AP|}{|AA'|} + \frac{|BP|}{|BB'|} + \frac{|CP|}{|CC'|} = 2.$$

Hinweis: Überraschenderweise hat die Aufgabe eine elegante Lösung, die das Verhältnis $|AP|/|AA'|$ mit dem Verhältnis der Flächen der Dreiecke $\Delta(P,B,C)$ und $\Delta(A,B,C)$ verknüpft.

4. *(4 Punkte)* Formulieren und beweisen Sie den ersten Teil des Satz von Menelaos, und machen Sie eine Skizze dazu, für den Fall, wo die Gerade zwei Seiten des Dreiecks in ihrem Innern schneidet.

5. *(3 Punkte)* **Satz:** *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis vom Radius r und mit Mittelpunkt M in $\mathbb{R}^2$. Sei $P \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{K}$, und sei G eine Gerade durch P mit $G \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$. Es kann $A = B$ oder $A \neq B$ sein. Dann gilt:*

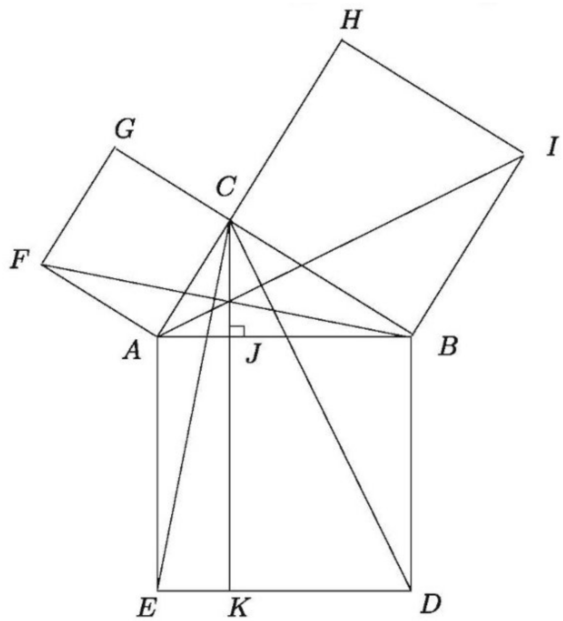
$$\frac{AP}{BP} \cdot |BP|^2 = |MP|^2 - r^2.$$

Aus diesem Satz folgen leicht der Sekantensatz (für P außerhalb des Kreises $\mathcal{K}$) und der Sehnensatz (für P innerhalb des Kreises $\mathcal{K}$).

Machen Sie eine Skizze für den Fall P außerhalb des Kreises $\mathcal{K}$. Beweisen Sie den Satz in diesem Fall durch Vergleich der Winkel $\measuredangle(PAM)$ und $\measuredangle(PBM)$ und Anwendung des Kosinussatzes.

Bitte wenden !!!

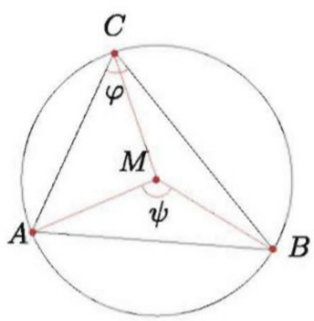
6. *(3 Punkte)* Zum Beweis des Satzes von Pythagoras für das in C rechtwinklige Dreieck $\Delta(A, B, C)$ findet sich in Euklids Elementen folgende Zeichnung:



Wie lautet der daraufhin gegebene Beweis? Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass die Flächen der Rechtecke $AJKE$ und $JBDK$ gleich b^2 bzw. a^2 sind (warum?). Um dies zu beweisen, bestimme man zwei Paare jeweils kongruenter Dreiecke und bestimme deren Fläche. Natürlich ist es nicht zulässig, einen der Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras zu verwenden.

7. *(2+1 Punkte)*

(a) Beweisen Sie den **Satz vom Umfangs- und Mittelpunktswinkel:**
Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck mit den Ecken auf einem Kreis. Ist $\varphi = \measuredangle(ACB)$ der Umfangswinkel über der Sehne AB und $\psi = \measuredangle(AMB)$ der Mittelpunktswinkel über der gleichen Sehne, so gilt $\psi = 2\varphi$.



(b) Sind die Umfangswinkel auf der gleichen Seite einer Sehne in einem Kreis alle gleich groß? Falls ja, bitte eine kurze Begründung. Falls nein, bitte ein Gegenbeispiel.

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 3 in der Übung am 11.04.2016