

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. (1+1 Punkte) Geben Sie je eine Formel für das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ zu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ und für das Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}^t$ zu $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an.
2. (3 Punkte) Beweisen Sie (ohne auf den Satz 1 in Kapitel 1.1 des Buchs zu verweisen, sondern mit einem ähnlichen Beweis) die korrigierte Fassung des Satzes 3, des orientierten Strahlensatzes:

Sind zwei Geraden G_1, G_2 mit Scheitel $G_1 \cap G_2 = \{S\}$ und zwei beliebige Geraden G_1^*, G_2^* mit den Schnittpunkten

$$G_\alpha \cap G_1^* = \{P_\alpha\}, \quad G_\alpha \cap G_2^* = \{Q_\alpha\} \text{ für } \alpha = 1, 2$$

gegeben, so gilt für die Teilungsverhältnisse

$$\frac{SP_1}{SQ_1} = \frac{SP_2}{SQ_2}$$

genau dann, wenn G_1^* und G_2^* parallel sind.

3. (1 Punkt) Beweisen Sie die folgende Kürzungsformel für Teilungsverhältnisse. Hier sind P_1, P_2, P_3, P_4 lauter verschiedene Punkte auf einer Geraden.

$$\frac{P_1P_3}{P_1P_2} \cdot \frac{P_1P_4}{P_1P_3} = \frac{P_1P_4}{P_1P_2}.$$

4. (3 Punkte) Sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gegeben. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$a < b + c.$$

Genauer: Zitieren Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Skalarprodukt im Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^2 , definieren Sie ausgehend vom Skalarprodukt die Standardmetrik im \mathbb{R}^2 , und beweisen Sie, dass die Standardmetrik tatsächlich die Dreiecksungleichung erfüllt.

5. (2+2 Punkte)
 - (a) Formulieren und beweisen Sie eine der drei Gleichungen des Kosinussatzes.
 - (b) Formulieren und beweisen Sie den Sinussatz. Beim Beweis dürfen Sie den Kosinussatz benutzen (\sim Beweis aus [AF15]). Sie dürfen aber auch einen direkten und wesentlich einfacheren Beweis geben.

6. (3 Punkte) (**Weidenhalbierung**) Wir betrachten ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ sowie einen beliebigen Punkt M auf der Seite BC . Man konstruiere elementargeometrisch einen Punkt N auf einer der Seiten AB oder AC derart, dass die Strecke MN das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ in zwei gleich große Flächen unterteilt.

Hinweis: Der Mittelpunkt P von BC hilft bei den Betrachtungen. Die Strecke AP teilt das Dreieck in zwei gleich große Flächen.

7. (3 Punkte) (**Satz von Sylvester und Gallei (1893 und 1944)**) Seien n Punkte in der Ebene gegeben, die nicht kollinear sind. Beweisen Sie, dass eine Gerade existiert, auf der genau zwei dieser Punkte liegen.

Hinweis: Betrachte unter allen Paaren (P, G) , bestehend aus einem der n Punkte P und einer durch mindestens zwei Punkte der Konfiguration verlaufenden Geraden G mit $P \notin G$ dasjenige Paar (P_0, G_0) , für welches P_0 minimalen positiven Abstand zu G_0 hat.

8. (2+1 Punkte) Ein *Pythagoras-Tripel* ist ein Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ natürlicher Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Es heißt primitiv, falls $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ ist. Auf der Menge aller Pythagoras-Tripel wird folgende Äquivalenzrelation \sim_P eingeführt:

$$(a, b, c) \sim_P (d, e, f) \iff \exists q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ mit } (a, b, c) = (qd, qe, qf).$$

Man sieht leicht, dass es in jeder Äquivalenzklasse von Pythagoras-Tripeln genau ein primitives Pythagoras-Tripel gibt.

Folgende Abbildungen geben eine transparente Konstruktion aller (Äquivalenzklassen von) Pythagoras-Tripeln.

$$\begin{array}{ccccc} \{\text{Pythagoras-Tripel}\} / \sim_P & \xleftrightarrow{1:1} & S^1 \cap \mathbb{Q}_{>0}^2 & \xleftrightarrow{1:1} &]0, 1[\cap \mathbb{Q}_{>0}, \\ [(a, b, c)] & \mapsto & \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = (x, y) & \xrightarrow{f} & \frac{y}{1+x} \\ [(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)] & \longleftarrow & \left(\frac{v^2 - u^2}{u^2 + v^2}, \frac{2uv}{u^2 + v^2}\right) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) & \xleftarrow{g} & \frac{u}{v} = t \end{array}$$

- (a) Rechnen Sie nach, dass $f \circ g = \text{id}$ und $g \circ f = \text{id}$ ist.
- (b) Für welche $t \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}_{>0}$ ist das Pythagoras-Tripel $(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$ mit $t = \frac{u}{v}$ und $\text{ggT}(u, v) = 1$ nicht primitiv? Was ist dann der ggT der 3 Zahlen?