

## Übungsaufgaben zur Geometrie

1. (1+1+1 Punkte)
  - (a) Geben Sie die Definition eines affinen Raums an.
  - (b) Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei affine Räume. Geben Sie die Definition einer affinen Abbildung  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  an.
  - (c) Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum, und seien  $p_0, \dots, p_n \in \mathcal{A}$  Punkte des affinen Raums. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass die Punkte eine *affine Basis* bilden.
2. (4+2 Punkte) Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum, seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zwei affine Unterräume mit  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ , und seien  $p \in \mathcal{A}_1$  und  $q \in \mathcal{A}_2$  beliebige Punkte. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} (i) \quad T(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) &= (T(\mathcal{A}_1) + T(\mathcal{A}_2)) \oplus T(p \vee q). \\ (ii) \quad \dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) &= \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(T(\mathcal{A}_1) \cap T(\mathcal{A}_2)) + 1. \end{aligned}$$

Sie dürfen Lemma 1.9 und alles vor Lemma 1.3 (e) und auch die Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen eines Vektorraums benutzen.

3. (3 Punkte) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum mit Körper  $K$  mit  $\text{char } K \neq 2$ , und seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  affine Unterräume mit  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ . Dann ist

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} a \vee b.$$

4. (1+1+1 Punkte)  $K^n$  ist in dieser Vorlesung der Spaltenvektorraum  $M(n \times 1, K)$  (und nicht der Zeilenvektorraum  $M(1 \times n, K)$ ). Eine affine Abbildung  $f : K^n \rightarrow K^m$  hat die Gestalt

$$f(x) = B \cdot x + b \quad \text{mit geeigneten } B \in M(m \times n, K), \quad b \in K^m.$$

- (a) Schreiben Sie  $\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{m+1}$  als Produkt einer geeigneten Matrix mit  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{n+1}$ .
- (b) Sei  $g : K^m \rightarrow K^l$  eine affine Abbildung mit  $g(y) = C \cdot y + c$  mit  $C \in M(l \times m, K)$ ,  $c \in K^l$ . Dann ist auch  $g \circ f : K^n \rightarrow K^l$  eine affine Abbildung. Berechnen Sie  $D$  und  $d$ , so dass  $(g \circ f)(x) = D \cdot x + d$  ist.
- (c) Schreiben Sie  $\begin{pmatrix} (g \circ f)(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{l+1}$  als Produkt von 2 geeigneten Matrizen mit  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Bitte wenden !!!

5. (2+2 Punkte) Den Hauptsatz der affinen Geometrie kann man eleganter mit dem Begriff einer *semiaffinen Abbildung* fassen:

Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum mit  $\dim \mathcal{A} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  und mit  $|K| \geq 3$ . Dann ist eine bijektive Abbildung  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  genau dann eine Kollineation, wenn sie semiaffin ist.

Geben Sie zwei elegante Definitionen: Eine für eine *semilineare Abbildung*  $f : V \rightarrow W$  zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen, eine für eine *semiaffine Abbildung*  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen zwei affinen Räumen über dem gleichen Körper  $K$ .

6. (1+2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel mit  $\dim \mathcal{A} = 1$  &  $|K| \geq 3$  und ein Beispiel mit  $\dim \mathcal{A} \geq 2$  &  $|K| = 2$  an, so dass es bei beiden Beispielen mehr Kollineationen als semiaffine bijektive Abbildungen gibt.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Prüfungsmodalitäten, Literatur) sind unter

[http://hilbert.math.uni-mannheim.de/16\\_FSS\\_geom.html](http://hilbert.math.uni-mannheim.de/16_FSS_geom.html)

zu finden.

**Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 1 in der Übung am 22.02.2016**