Klausur am 04.09.2015
zur Linearen Algebra IIb

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass ich sehen kann, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben kann ich keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

Viel Erfolg!

1. *(6=1+2+3 Punkte)*

   (a) Wann heißt ein Automorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V mit Skalarprodukt ϕ *unitär*?

   (b) Die Gruppe der Isometrien der Euklidischen Geraden $(\mathbb{R}, \phi_{st})$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st}) &= \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes O(\mathbb{R}, \phi_{st}) = \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes \{\mathrm{id}, s_0\} \\ &= \{\text{Translationen}\} \cup \{\text{Spiegelungen}\} = \{T_a \,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{s_b \,|\, b \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

   Hier ist T_a die Translation um a, also $T_a(x) = x+a$, und s_b ist die Spiegelung am Punkt b. Ersetzen Sie in den folgenden Formeln die Fragezeichen durch die richtigen Formeln.

$$\begin{aligned} s_b(x) &= ?, \quad s_b \circ T_a = s_?, \\ T_a \circ s_b &= s_?, \quad s_b \circ T_a \circ s_b = T_?. \end{aligned}$$

   (c) Zeigen Sie $\overset{!}{=}$ in

$$\begin{aligned} SU(2) &= \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär und } \det A = 1\} \\ &\overset{!}{=} \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a\overline{a} + b\overline{b} = 1\}. \end{aligned}$$

2. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Formulieren Sie den Spektralsatz für unitäre Matrizen.

   (b) Es gibt 4 Klassen von orthogonalen Automorphismen des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$. Eine von ihnen besteht nur aus id und wird durch die Matrix E_3 repräsentiert. Geben Sie die Namen der anderen 3 Klassen an, und auch je eine Matrix, die die Klasse repräsentiert (da gibt es immer viele Matrizen).

3. *(6=4+2 Punkte)*

   (a) Bei einem Polytop im $\mathbb{R}^3$ ist e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Polygone (jeweils auf dem Rand des Polytops). e_i ist die Anzahl der Ecken, von denen i Kanten ausgehen, f_j ist die Anzahl der Polygone mit j Kanten.

   Sei A ein Ikosaeder mit Kantenlängen 1 im 3-dimensionalen Euklidischen Raum. An jeder Ecke wird mit einem Schnitt ein Stück abgeschnitten, so dass der Schnitt die 5 von der Ecke ausgehenden Kanten in den Punkten mit Abstand 1/3 zur Ecke durchschneidet. Man erhält ein Polytop, dessen Rand aus 12 regulären 5-Ecken und 20 regulären 6-Ecken besteht und dessen Kanten alle die Länge 1/3 haben.

   Geben Sie (ohne Beweis) die Zahlen e, k, f, die Paare (i, e_i) mit $e_i \neq 0$ und die Paare (j, f_j) mit $f_j \neq 0$ an. Schreiben Sie die Gleichungen $2 = e - k + f$ und $2k = \sum_i ie_i = \sum_j jf_j$ mit den konkreten Zahlenwerten hin.

   (b) Geben Sie an, zu welchen Permutationsgruppen oder Untergruppen von Permutationsgruppen die Gruppen $\mathrm{Sym}_{or}(P_T)$, $\mathrm{Sym}_{or}(P_W)$ und $\mathrm{Sym}_{or}(P_D)$ der Drehungen eines Tetraeders P_T, eines Würfels P_W und eines Dodekaeders P_D isomorph sind. Geben Sie auch an, welche geometrischen Objekte jeweils durch ihre Permutation unter der Gruppe zu diesem Isomorphismus führen. Sie müssen aber nicht beweisen, dass die Behauptungen stimmen.

4. *(6=1+1+1+3 Punkte)*

   (a) Wieviele Ähnlichkeitsklassen von Ornamentgruppen gibt es?

   (b) Wieviele Ähnlichkeitsklassen von kristallographischen Raumgruppen mit $n = 3$ gibt es?

   (c) Definieren Sie, was ein *Gitter im* $\mathbb{R}^n$ ist.

   (d) Geben Sie die Namen der 5 Typen von Gittern im $\mathbb{R}^2$ an. Geben Sie auch jeweils für ein solches Gitter G die Anzahl $|\{f \in O(\mathbb{R}^2, \phi_{st}) \mid f(G) = G\}|$ an.

5. *(6 Punkte)* $P_T \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $P_I \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ sind ein Tetraeder und ein Ikosaeder in $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit 0 als Mittelpunkt. $\mathrm{Sym}_{or}(P_T) \subset SO(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Sym}_{or}(P_I) \subset SO(3, \mathbb{R})$ sind die Gruppen der Drehungen des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, die den Tetraeder bzw. den Oktaeder invariant lassen. Jeweils sei

$$\begin{aligned} X &:= \text{Anzahl der Drehachsen eines Typs,} \\ Y &:= \text{Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs.} \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle sagt einiges über $\mathrm{Sym}_{or}(P_T)$ aus.

Tetraeder P_T:

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
$-$	$-$	0	(id :) 1
4	durch Ecken und gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$
3	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$3 \cdot 1 = 3$

Erstellen Sie eine analoge Tabelle für $\mathrm{Sym}_{or}(P_I)$.

6. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Welche Gestalt hat eine *affin lineare* Abbildung $f : M(n \times 1, K) \to M(m \times 1, K)$? (Sie sollen also eine Definition geben; K ist wie immer ein Körper.) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in M((m+1) \times 1, K)$ als Produkt einer geeigneten Matrix mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in M((n+1) \times 1, K)$.

   (b) Sei $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$, sei s_v die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot v$, und sei T_a die Translation um den Vektor a. Zeigen Sie, dass $T_a \circ s_v$ eine Gleitspiegelung ist. Genauer: Bestimmen Sie eine Gerade E im $\mathbb{R}^2$ und einen Vektor $b \neq 0$, der in Richtung der Geraden E läuft, so dass $T_a \circ s_v = T_b \circ s_E$ ist. Hier ist s_E die Spiegelung an der Geraden E und T_b die Translation um den Vektor b. Machen Sie auch eine Skizze dazu.

7. *(6 Punkte)* Sei V ein n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \{f : V \to V \text{ Isometrie mit } f(0) = 0\} \\ = \ & \{f : V \to V \text{ orthogonaler Automorphismus von } V\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $\supset$.

8. *(6=2+2+2 Punkte)*

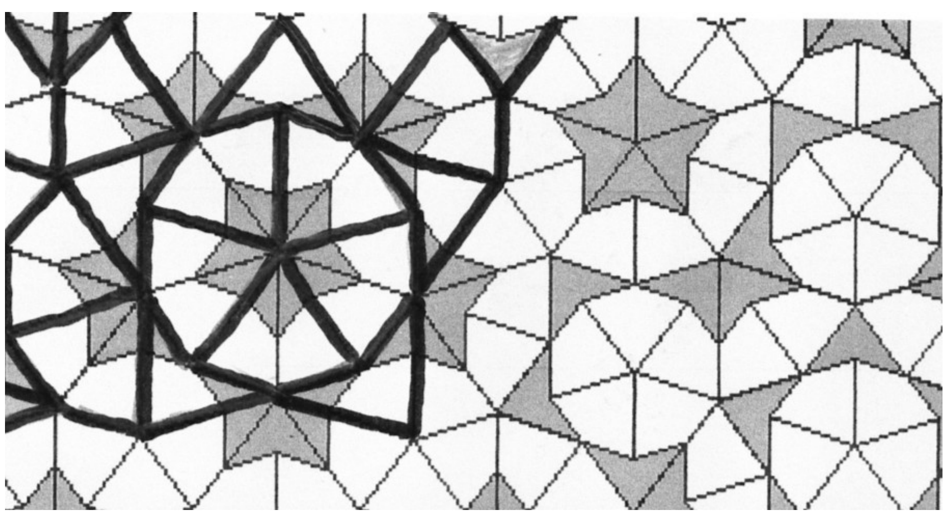
(a) Es gibt 2 Typen von *Penrose-Fliesen*, die *Drachen* und die *Schwalben*. Man erhält je eine Kopie durch Zerschneiden eines geeigneten Parallelogramms. Geben Sie in Form von 3 Skizzen die beiden Fliesen und das Parallelogramm an, inklusive der Färbung der Ecken als schwarze oder weiße Ecken bei den Fliesen und inklusive der Seitenlängen und Winkel und des zusätzlichen Punktes im Innern des Parallelogramms, den man zum Zerschneiden braucht.

(b) Eine *Penrose-Pflasterung* ist eine Überdeckung der Ebene $\mathbb{R}^2$ durch unendlich viele Penrose-Fliesen, wobei die Fliesen sich nur in ihrem Rand schneiden dürfen und nur Ecken gleicher Farbe (schwarz oder weiß) aneinanderstoßen dürfen.

Es gibt tatsächlich unendlich viele Penrose-Pflasterungen. Conway bemerkte, dass man durch folgende Prozedur, genannt *Vergröberung*, aus einer Penrose-Pflasterung eine neue Penrose-Pflasterung mit neuen Fliesen erhält, die um den Faktor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ größer als die alten Fliesen sind:

Jede Schwalbe wird durch einen Schnitt von einer zur anderen schwarzen Ecke in zwei Dreiecke geteilt. Die dabei entstandenen Kanten werden *neu* genannt. Alle Drachen und/oder Dreiecke, die eine nicht neue kurze Kante gemeinsam haben, werden entlang dieser Kante verklebt.

Das folgende Bild ist ein Ausschnitt einer Penrose-Pflasterung. Zeichnen Sie alle Kanten der Vergröberung ein. Da man sich leicht vertut, ist es sinnvoll, die Kanten mit Bleistift vorzuzeichnen und dann mit einem bessser sichtbaren Stift nachzuzeichnen.



(c) Beweisen Sie mit Hife der Prozedur *Vergröberung*, dass es zu einer Penrose-Pflasterung keine Translation $\neq$ id gibt, die die Penrose-Pflasterung auf sich abbildet.