Lösungen der Klausur am 04.09.2015 zur Linearen Algebra IIb

1. *(6=1+2+3 Punkte)*

   (a) f ist genau dann *unitär*, wenn $\phi(f(a), f(b)) = \phi(a, b)$ für alle $a, b \in V$ gilt.

   (b)
   $$\begin{aligned} s_b(x) &= -x + 2b, \quad s_b \circ T_a = s_{b-\frac{1}{2}a}, \\ T_a \circ s_b &= s_{b+\frac{1}{2}a}, \quad s_b \circ T_a \circ s_b = T_{-a}. \end{aligned}$$

   (c)
   $$\begin{aligned} SU(2) &= \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär und } \det A = 1\} \\ &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1, \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a\overline{a} + b\overline{b} = 1\}. \end{aligned}$$

2. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Sei $A \in U(n)$ eine unitäre Matrix. Dann gilt:
   (i) Alle Eigenwerte λ von A erfüllen $|\lambda| = 1$.
   (ii) A ist diagonalisierbar.
   (iii) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.
   $$\mathrm{Eig}(A, \lambda_1) \perp \mathrm{Eig}(A, \lambda_2) \qquad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$
   Es gibt eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$ bezüglich des Standardskalarproduktes aus Eigenvektoren von A. Ist
   $$T := M(\text{Standardbasis}, ON\text{-Basis aus Eigenvektoren})$$
   die Basiswechselmatrix, so ist $T \in U(n)$ und
   $$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

   (b)
   $$\text{Drehungen:} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha, \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in (0, 2\pi),$$
   $$\text{Spiegelungen:} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
   $$\text{Drehspiegelungen:} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in (0, 2\pi).$$

3. *(6=4+2 Punkte)*

(a) 12 5-Ecke und 20 6-Ecke $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&f_5 = 12,\ \ f_6 = 20,\ \ f = 32,\\ &e = e_3 = 5 \cdot e(\text{Ikosaeder}) = 5 \cdot 12 = 60,\\ &k = k(\text{Ikosaeder}) + 5 \cdot 12 = 30 + 60 = 90.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 &= e - k + f = 60 - 90 + 32 = 2,\\ 2k = 180 &= \sum_i i \cdot e_i = 3 \cdot e_3 = 3 \cdot 60 = 180\\ &= \sum_j j \cdot f_j = 5 \cdot f_5 + 6 \cdot f_6 = 5 \cdot 12 + 6 \cdot 20 = 180.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\text{Sym}_{or}(P_T) &\cong A_4,\\ \text{Sym}_{or}(P_W) &\cong S_4,\\ \text{Sym}_{or}(P_D) &\cong A_5.\end{aligned}$$

Beim Tetraeder werden die 4 Ecken permutiert. Beim Würfel werden die 4 Raumdiagonalen permutiert. Beim Dodekaeder gibt es 5 Würfel, deren Ecken Ecken des Dodekaeders sind. Die 5 Würfel werden permutiert.

4. *(6=1+1+1+3 Punkte)*

(a) 17.

(b) 219.

(c) Ein *Gitter* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Untergruppe $G \subset \mathbb{R}^n$, die von einer Basis $(b_1, ..., b_n)$ von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. (Dann ist $G =< b_1, ..., b_n >= \sum_{j=1}^n \mathbb{Z} \cdot b_j$, und G ist als Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^n$. Dann ist $b_1, ..., b_n$ eine *Gitterbasis*.)

(d) .

Name des Gitters	$\lvert\{f \in O(\mathbb{R}^2, \phi_{st}) \mid f(G) = G\}\rvert$
schiefes Gitter	2
rechtwinkliges Gitter	4
quadratisches Gitter	8
rhombisches Gitter	4
hexagonales Gitter	12

5. *(6 Punkte)*

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
6	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$	$6 \cdot 4 = 24$
15	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$15 \cdot 1 = 15$
10	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$10 \cdot 2 = 20$

6. *(6=2+4 Punkte)*

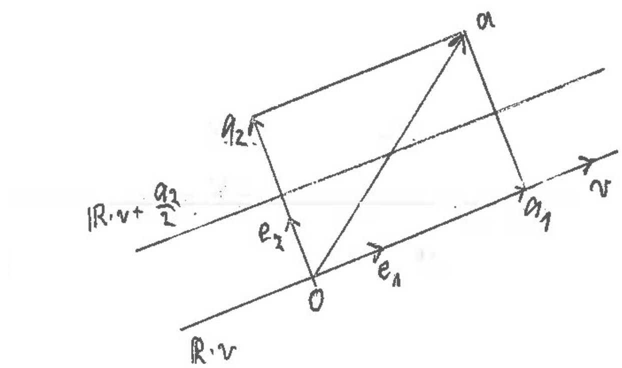
   (a) f ist affin linear, wenn es die Gestalt $f(x) = B \cdot x + b$ mit geeigneten $B \in B(m \times n, K)$ und $b \in M(m \times 1, K)$ hat.

   $$\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Sei $e_1 := v/\|v\|$ und $e_2 := d_{\pi/2}(e_1)$. Dann ist (e_1, e_2) eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$. Es ist $a = a_1 + a_2$ mit geeigneten $a_1 \in \mathbb{R}e_1 - \{0\}$ und $a_2 \in \mathbb{R}e_2$. Die folgende Skizze zeigt, dass die Gerade $E := \mathbb{R} \cdot v + \frac{a_2}{2}$ die Fixpunktmenge von $T_{a_2} \circ s_v$ ist. Daher ist $T_{a_2} \circ s_v = s_E$, und es gilt

   $$T_a \circ s_v = T_{a_1} \circ (T_{a_2} \circ s_v) = T_{a_1} \circ s_E$$

   Die rechte Seite $T_{a_1} \circ s_E$ ist offensichtlich eine Gleitspiegelung, denn $a_1 \neq 0$.



7. *(6 Punkte)* Sei $f : V \to V$ eine Isometrie mit $f(0) = 0$. Es muß gezeigt werden, dass f das Skalarprodukt erhält und dass f linear ist.

   Das Skalarprodukt kann mit Hilfe des Abstandes zum Nullpunkt ausgedrückt werden,

   $$\begin{aligned} 2 \cdot \phi(x, y) &= \phi(x, x) + \phi(y, y) - \phi(x - y, x - y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \\ &= d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 - d(x, y)^2. \end{aligned}$$

   Weil f Abstände und den Nullpunkt erhält, erhält f das Skalarprodukt ϕ.

   Es bleibt zu zeigen, dass f linear ist. Sei $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ eine ON-Basis von V. Dann sind auch die Vektoren $(f(b_1), ..., f(b_n))$ orthonormal zueinander. Sie sind linear unabhängig, denn wäre etwa $f(b_1) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \cdot f(b_j)$, so wäre für $k = 2, ..., n$

   $$0 = \phi(b_1, b_k) = \phi(f(b_1), f(b_k)) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \cdot \phi(b_j, b_k) = \lambda_k,$$

   also $f(b_1) = 0$, im Widerspruch zu $\|f(b_1)\| = \|b_1\| = 1$. Daher ist $(f(b_1), ..., f(b_n))$ eine ON-Basis.

   Für ein beliebiges $x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot b_j \in V$ ist

   $$\phi(f(x), f(b_j)) = \phi(x, b_j) = x_j,$$

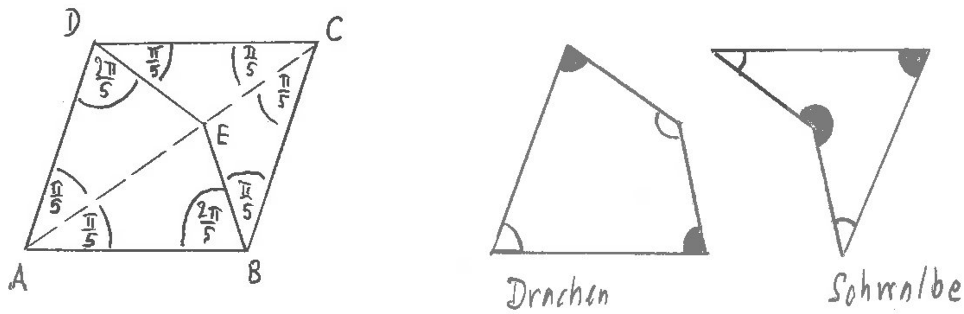
also ($\overset{*}{=}$ gilt, weil $f(b_1), ..., f(b_n)$ eine ON-Basis ist)

$$f(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot b_j) = f(x) \overset{*}{=} \sum_{j=1}^{n} \phi(f(x), f(b_j)) \cdot f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(b_j).$$

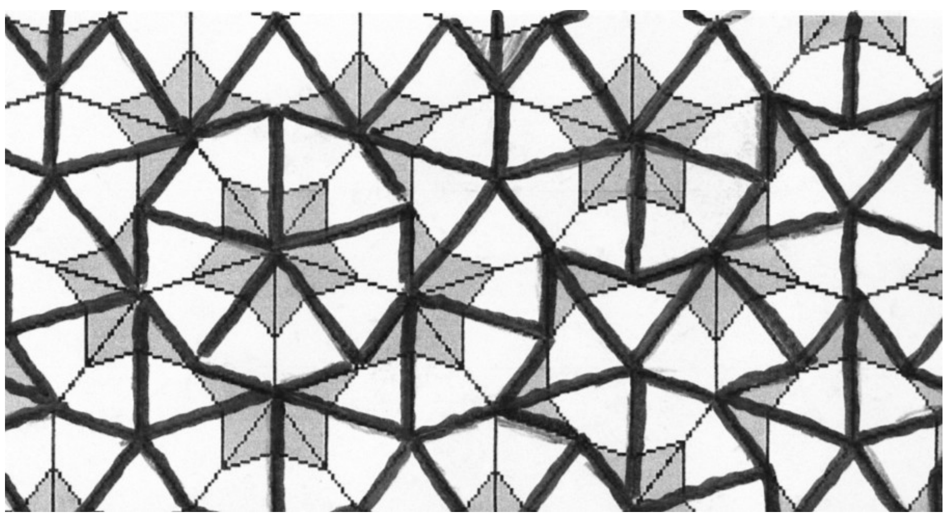
Daraus folgt die Linearität von f. Also ist f ein orthogonaler Automorphismus.

8. *(6=2+2+2 Punkte)*

   (a) $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A) = d(A, E) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,
   $d(E, B) = d(E, D) = d(E, C) = 1$.



   (b) .



   (c) Wenn eine Penrose-Pflasterng unter einer nichttrivialen Translation invariant wäre, so wäre auch jede Penrose-Pflasterung, die man durch n-maliges Vergröbern ($n \in \mathbb{N}$) erhält, invariant unter der Translation. Aber für genügend großes n sind die Fliesen so groß, dass die Verschiebung einer einzelnen Fliese die Fliese überlappen würde. Dann kann die Penrose-Pflasterung nicht invariant unter der Translation sein. Ein Widerspruch.