Klausur am 13.06.2015 zur Linearen Algebra IIb

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass ich sehen kann, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben kann ich keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

Viel Erfolg!

1. *(6=1+1+1+3 Punkte)*

   (a) Wann heißt ein Automorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen Euklidischen Vektorraums V mit Skalarprodukt ϕ *orthogonal*?

   (b) Geben Sie eine Formel an, die eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ genau dann erfüllt, wenn A *orthogonal* ist. Die Formel soll A^{-1} nicht enthalten.

   (c) Geben Sie eine Charakterisierung dafür, dass eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ orthogonal ist, mit Hilfe einer Eigenschaft ihrer Spaltenvektoren.

   (d) Zeigen Sie, dass es eindeutige reelle Zahlen a, b, c, d, e mit $a > 0$ und $e > 0$ gibt, so dass die Matrix $\begin{pmatrix} 3/5 & a & d \\ 4/5 & b & 0 \\ 0 & c & e \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix ist, und bestimmen Sie diese Zahlen.

2. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Formulieren Sie den Spektralsatz für unitäre Automorphismen eines n-dimensionalen ($n \in \mathbb{N}$) unitären Vektorraums.

   (b) Formulieren Sie den Spektralsatz für reelle orthogonale Matrizen.

3. *(6=2+3+1 Punkte)*

   (a) Sei $\alpha \in [0, 2\pi[$. Die Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ ist als reelle Matrix diagonalisierbar (das müssen Sie nicht beweisen). Geben Sie (ohne Beweis) eine ON-Basis des $M(2\times 1, \mathbb{R})$ aus Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte an.

   (b) Sei V ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Dann ist V auch ein metrischer Raum. Geben Sie die Namen der 7 Typen von Isometrien von V an, und beschreiben Sie bei allen 7 Typen die Fixpunktmenge (bei einigen ist sie leer).

   (c) Geben Sie in der Situation von (b) ohne Beweis an, von welchen möglichen Typen Kompositionen der Gestalt $Translation \circ$ (*echte Drehung*) und der Gestalt $Translation \circ$ *Spiegelung* sind.

4. *(6=2+2+2 Punkte)*

   (a) Was ein Polytop im $\mathbb{R}^3$ ist, wird hier als bekannt vorausgesetzt. Schreiben Sie auf, was bei einem Polytop A die Zahlen e, k und f sind, und formulieren Sie den Eulerschen Polyedersatz.

   (b) Definieren Sie, was ein Platonischer Körper ist. Bemerkung: In der Definition treten zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ auf.

   (c) Listen Sie in einer Tabelle für alle Platonischen Körper ihre Namen und die Zahlen m, n, e, k, f auf.

5. *(6 Punkte)* $P_T \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $P_O \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ sind ein Tetraeder und ein Oktaeder in $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit 0 als Mittelpunkt. $\mathrm{Sym}_{or}(P_T) \subset SO(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Sym}_{or}(P_O) \subset SO(3, \mathbb{R})$ sind die Gruppen der Drehungen des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, die den Tetraeder bzw. den Oktaeder invariant lassen. Jeweils sei

$$\begin{aligned} X &:= \text{Anzahl der Drehachsen eines Typs,} \\ Y &:= \text{Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs.} \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle sagt einiges über $\mathrm{Sym}_{or}(P_T)$ aus.

Tetraeder P_T:

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
$-$	$-$	0	(id :) 1
4	durch Ecken und gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$
3	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$3 \cdot 1 = 3$

Erstellen Sie eine analoge Tabelle für $\mathrm{Sym}_{or}(P_O)$.

6. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Sei $g \in O(\mathbb{R}^3, \phi_{st})$ (ϕ_{st} ist das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$). Sei $a \in \mathbb{R}^3$, und sei $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Translation um den Vektor a. Zeigen Sie, dass $g \circ T_a \circ g^{-1}$ eine Translation T_b ist, und bestimmen Sie b.

   (b) Sei $\alpha \in]0, 2\pi[$, und sei d_α die Drehung des $\mathbb{R}^2$ mit 0 als Fixpunkt um den Winkel α. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^2$, und T_a sei die Translation um a. Dann ist $T_a \circ d_\alpha$ eine Drehung um den Winkel α und um einen Fixpunkt p. Dass $T_a \circ d_\alpha$ eine Drehung ist, müssen Sie nicht beweisen. Aber Sie sollen den Fixpunkt p bestimmen und eine Skizze und eine kleine Rechnung dazu machen.

7. *(6=1+5 Punkte)* Das *Vektorprodukt* $a \times b$ von zwei Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$ im $\mathbb{R}^3$ ($= M(1 \times 3, \mathbb{R})$) ist

$$a \times b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \in \mathbb{R}^3.$$

Offensichtlich gilt für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$(a \times b) \cdot c^{tr} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b \times c) \cdot a^{tr} = (c \times a) \cdot b^{tr},$$

und es gilt $a \times b = 0$, falls $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

Zeigen Sie

$$\phi_{st}(a \times b, a) = \phi_{st}(a \times b, b) = 0$$

und im Fall $a \neq 0$ und $b \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \times b \end{pmatrix} = \|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot (\sin \measuredangle(a, b))^2.$$

8. *(6=2+4 Punkte)*

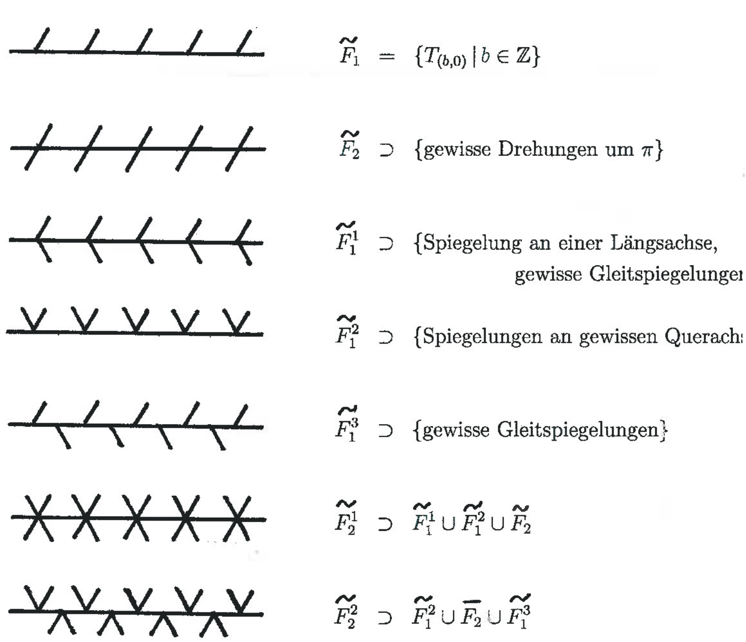
(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wann heißt eine Untergruppe $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_{st})$ (d_{st} ist die durch das Standardskalarprodukt ϕ_{st} induzierte Standardmetrik) *diskret*?

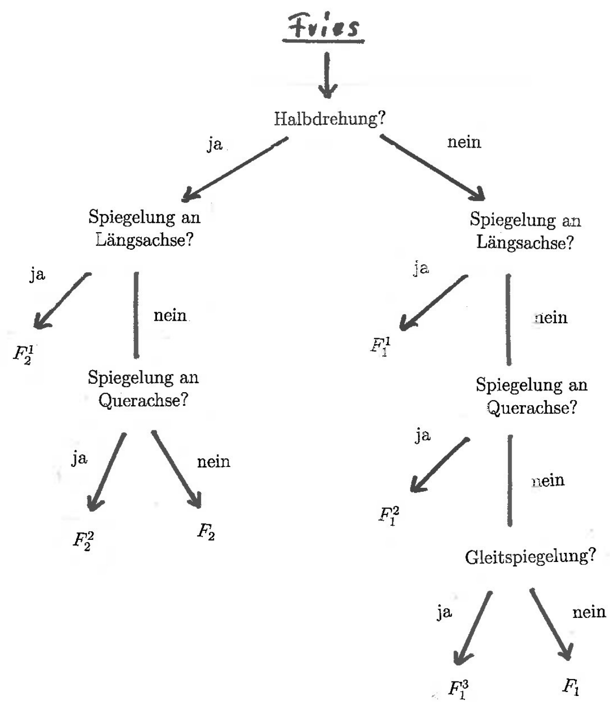
Hinweis: Zwei Eigenschaften. Die zweite Eigenschaft betrifft die Translationsuntergruppe $G \cap \mathrm{Transl}(\mathbb{R}^n)$ und involviert eine Zahl $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

(b) Die diskreten Untergruppen im Fall $(n, k) = (2, 1)$ heißen *Friesgruppen*. Es gibt 7 Ähnlichkeitsklassen von Friesgruppen. Sie werden $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1$ und F_2^2 genannt.

Die folgende Tabelle links gibt zu jeder der 7 Klassen einen Ausschnitt eines Frieses, so dass die Symmetriegruppe des Frieses eine Gruppe $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \widetilde{F}_1^1, \widetilde{F}_1^2, \widetilde{F}_1^3, \widetilde{F}_2^1, \widetilde{F}_2^2$ in der Klasse $F_1, F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1, F_2^2$ ist. Rechts in der Tabelle stehen einige Zusatzinformationen. $\overline{F}_2$ ist eine weitere Friesgruppe in der Klasse F_2.

Das folgende Diagramm rechts gibt einen Algorithmus, mit dem man die Symmetriegruppe eines gegebenen Frieses bestimmen kann.





Schreiben Sie in der folgenden Tabelle unter jeden Ausschnitt eines Frieses die Klasse der Symmetriegruppe des Frieses.

CCCC	IIIII	LΓLΓ	PPPP	UUUU	VΛVΛ	WWWW	ZZZZ