Lösungen der Klausur am 13.06.2015 zur Linearen Algebra IIb

1. *(6=1+1+1+3 Punkte)*

   (a) f ist genau dann *orthogonal*, wenn $\phi(f(a), f(b)) = \phi(a, b)$ für alle $a, b \in V$ gilt.

   (b) $A^{tr} \cdot A = E_n$.

   (c) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten eine ON-Basis des $M(n \times 1, \mathbb{R})$ (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

   (d) $\begin{pmatrix} 3/5 & a & d \\ 4/5 & b & 0 \\ 0 & c & e \end{pmatrix} =: (v_1 \; v_2 \; v_3)$. Die Matrix ist genau dann orthogonal, wenn v_1, v_2 und v_3 eine ON-Basis des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ bilden.

$$
\begin{array}{rcl}
\|v_1\|^2 & = & \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 \quad \text{ok}, \\
0 & = & \phi_{st}(v_1, v_3) = \frac{3}{5} \cdot d, \quad \text{also } d = 0. \\
 & & \text{Mit } \|v_3\| = 1 \text{ und } e > 0 \text{ folgt } e = 1. \\
0 & = & \phi_{st}(v_1, v_2) = \frac{3}{5} \cdot a + \frac{4}{5} \cdot b, \quad \text{also } (a, b) \in \mathbb{R} \cdot (4, -3). \\
0 & = & \phi_{st}(v_2, v_3) = a \cdot d + c \cdot e = c, \quad \text{also } c = 0. \\
1 & = & \|v_2\|^2 = a^2 + b^2. \\
 & & \text{Mit } (a, b) \in \mathbb{R} \cdot (4, -3) \text{ und } a > 0 \text{ folgt } (a, b) = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}).
\end{array}
$$

   Also ist

$$
\begin{pmatrix} 3/5 & a & d \\ 4/5 & b & 0 \\ 0 & c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

2. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ, und sei $f : V \to V$ ein unitärer Automorphismus, d.h. $f \in U(V, \phi)$. Dann gilt:

   (i) Alle Eigenwerte λ von f erfüllen $|\lambda| = 1$.

   (ii) f ist diagonalisierbar.

   (iii) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.

$$
\mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \perp \mathrm{Eig}(f, \lambda_2) \qquad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.
$$

   Wegen (ii) und (iii) gibt es eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f.

(b) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, d.h. $A^{tr} = A^{-1}$. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $T \in O(n, \mathbb{R})$, so daß $T^{-1} \cdot A \cdot T$ die Block-Gestalt hat (wo nichts steht, stehen Nullen):

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} E_k & & & & & & \\ & -E_l & & & & & \\ & & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & \\ & & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\alpha_m & -\sin\alpha_m \\ & & & & & \sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{pmatrix}.$$

Hier ist $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$ und natürlich $k + l + 2m = n$. Die Winkel α_i sind in $[0, 2\pi) - \{0, \pi\}$.

3. *(6=2+3+1 Punkte)*

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ bilden eine ON-Basis aus Eigenvektoren. Die Eigenwerte sind 1 und -1.

(b) Identität: Fixpunktmenge $= V$.
Spiegelungen: Fixpunktmenge = die Ebene, an der gespiegelt wird.
Echte Drehungen: Fixpunktmenge = die Gerade, um die gedreht wird.
Drehspiegelungen: Fixpunktmenge = der Schnittpunkt von Drehachse und Spiegelungsebene.
Translationen: Fixpunktmenge $= \emptyset$.
Gleitspiegelungen: Fixpunktmenge $= \emptyset$.
Schraubungen: Fixpunktmenge $= \emptyset$.

(c)

$$\begin{aligned} \text{Translation} \circ (\text{echte Drehung}) &\in \{\text{echte Drehungen}\} \cup \{\text{Schraubungen}\}, \\ \text{Translation} \circ \text{Spiegelung} &\in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}. \end{aligned}$$

4. *(6=2+2+2 Punkte)*

(a) e ist die Anzahl der Ecken auf dem Rand von A.
k ist die Anzahl der Kanten auf dem Rand von A.
f ist die Anzahl der Polygone auf dem Rand von A.
Eulerscher Polyedersatz: Bei einem Polytop ist $e - k + f = 2$.

(b) Ein *Platonischer Körper* ist ein Polytop, so dass es ein n und ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gibt, so dass alle Flächen im Rand des Polytops reguläre n-Ecke sind und so dass in jeder Ecke m reguläre n-Ecke aneinanderstoßen.

(c)

m	n	e	k	f	
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel = Hexaeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

5. *(6 Punkte)*

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$6 \cdot 1 = 6$
4	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

6. *(6=2+4 Punkte)*

(a)

$$(g \circ T_a \circ g^{-1})(x) = g(T_a(g^{-1}(x))) = g(g^{-1}(x) + a) = x + g(a) = T_{g(a)}(x),$$

also ist $g \circ T_a \circ g^{-1} = T_{g(a)}$.

(b) Sei $e_1 := a/\|a\|$ und $e_2 := d_{\pi/2}(e_1)$. Dann ist (e_1, e_2) eine orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^2$.

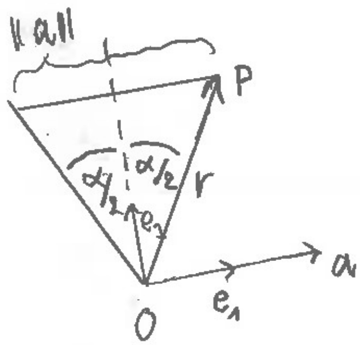
$$p := \frac{\|a\|}{2}(e_1 + \cot\frac{\alpha}{2} \cdot e_2) = r \sin\frac{\alpha}{2} \cdot e_1 + r\cos\frac{\alpha}{2} \cdot e_2 \quad \text{mit} \quad r := \frac{\|a\|/2}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ist ein Fixpunkt von f ist.

Kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} q &:= p - a = \frac{\|a\|}{2}(-e_1 + \cot\frac{\alpha}{2} \cdot e_2), \\ (T_a \circ d_\alpha)(p) &= T_a(q) = q + a = p. \end{aligned}$$

Skizze:



7. *(6=1+5 Punkte)*

$$\begin{aligned} \phi_{st}(a \times b, a) &= (a \times b) \cdot a^{tr} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \phi_{st}(a \times b, b) &= (a \times b) \cdot b^{tr} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Die angegebene Formel gibt für $c = a \times b$

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \times b \end{pmatrix} = (a \times b) \cdot (a \times b)^{tr} = \|a \times b\|^2.$$

$$\begin{aligned}
& \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot (\sin \measuredangle(a,b))^2 \\
= \; & \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \cdot (1 - (\cos \measuredangle(a,b))^2) \\
= \; & \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - \phi_{st}(a,b)^2 \\
= \; & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
= \; & (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_2^2) \\
& -(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3) \\
= \; & (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2) + (a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_3b_1a_1b_3) + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1) \\
= \; & (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
= \; & \|a \times b\|^2.
\end{aligned}$$

8. *(6=2+4 Punkte)*

   (a) Eine Untergruppe $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_{st})$ heißt *diskret*, falls das Bild $\Psi(G)$ unter der Abbildung

   $$\Psi : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d_{st}) \to O(\mathbb{R}^n, \phi_{st}), \;\; f \mapsto g := T_{-f(0)} \circ f,$$

   endlich ist und falls die Translationsuntergruppe $G \cap \mathrm{Transl}(\mathbb{R}^n)$ von den Translationen um Vektoren $a_1, ..., a_k$ mit $0 \leq k \leq n$ erzeugt wird, wobei $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

   (b) .

CCCC	IIIII	LΓLΓ	PPPP	UUUU	$\bigvee \bigwedge \bigvee \bigwedge$	W W W W	ZZZZ
F_1^1	F_2^1	F_1^3	F_1	F_1^2	F_2^2	F_1^2	F_2