Klausur am 04.09.2015 zur Linearen Algebra II

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 90 Minuten. Insgesamt kann man 48 Punkte erreichen. Die Klausur umfaßt 8 Aufgaben zu je 6 Punkten. Die Aufgaben sind aber verschieden schwer.
Geben Sie da, wo es etwas zu rechnen oder zu beweisen gibt, hinreichend viele Zwischenschritte an, so dass ich sehen kann, wie Sie die Aufgaben gelöst haben.
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt: Es dürfen weder eigene Aufzeichnungen noch Bücher und auch keine Taschenrechner verwendet werden.

Bitte geben Sie dieses Blatt mit ab. Bitte schreiben Sie auf jedes weitere Blatt, das Sie abgeben, ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Matrikelnummer.
Für abgegebene Blätter ohne diese Angaben kann ich keine Punkte vergeben!

Vor- und Nachname:
Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note

Bitte wenden Sie dieses Aufgabenblatt erst auf Aufforderung.

Viel Erfolg!

1. *(6=3+1+2 Punkte)*

   (a) Eine *(zweistellige) Relation* auf einer Menge $M \neq \emptyset$ ist eine Teilmenge R von $M \times M$. Welche Eigenschaften muß eine Relation erfüllen, um eine *Äquivalenzrelation* zu sein? Geben Sie die Namen der Eigenschaften *und* die Eigenschaften selbst an.

   (b) Berechnen Sie die Zahlen $\varphi(105)$ und $\varphi(72)$. Hier $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche phi-Funktion.

   (c) Die Einheitengruppe des Ring $(\mathbb{Z}_{20}, +_{20}, \cdot_{20})$ ist $\mathbb{Z}_{20}^*$ mit $|\mathbb{Z}_{20}^*| = \varphi(20) = 8$. Machen Sie eine Tabelle, die in der 1. Zeile alle Elemente von $\mathbb{Z}_{20}^*$ und in der 2. Zeile ihre Inversen enthält. Das Inverse zu einem Element soll unter dem Element stehen.

2. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Das m-te Kreisteilungspolynom $\Phi_m(x)$ ist definiert durch

   $$\Phi_m = \Phi_m(x) := \prod_{a \in \mathbb{Z}_m^*} (x - e^{2\pi i a/m}) \in \mathbb{C}[x].$$

   Φ_m ist offenbar unitär und erfüllt $\deg \Phi_m = \varphi(m)$. Tatsächlich ist $\Phi_m \in \mathbb{Z}[x]$, und es ist in $\mathbb{Z}[x]$ und in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Und die Kreisteilungspolynome lassen sich rekursiv mit folgender Formel berechnen:

   $$x^m - 1 = \prod_{d \in \mathbb{N}:\ d|m} \Phi_d.$$

   Berechnen Sie so die Kreisteilungspolynome Φ_3, Φ_5 und Φ_{15}.

   (b) Bestimmen Sie eine Lösung b des Gleichungssystems

   $$\begin{aligned} b &\equiv 4 \bmod 5 \\ b &\equiv 3 \bmod 11 \\ b &\equiv 7 \bmod 13 \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie auch Ihren Lösungsweg.

3. *(6=2+1+3 Punkte)*

   (a) Wann ist eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ in Jordannormalform?

   (b) Geben Sie an, wie die Begleitmatrix $A^{(f)}$ zu einem unitären Polynom $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0$ aussieht. Ihr charakteristisches Polynom ist f.

   (c) Sei f wie in (b) und $f = \sum_{j=1}^{m} (t - b_j)^{r_j}$ mit $b_j \in K$ und $r_j \in \mathbb{N}$. Welche Eigenwerte und was für Jordanblöcke hat eine zu $A^{(f)}$ konjugierte Matrix in Jordannormalform? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Beweisen Sie Lemma 10.16 der Vorlesung:
   Sei R ein Hauptidealring. Dann haben beliebige Elemente $a_1, ..., a_n \in R$ einen größten gemeinsamen Teiler. Er ist Linearkombination der Elemente $a_1, ..., a_n$.

(b) Beweisen Sie Lemma 10.18 (b) der Vorlesung:
Sei R ein Hauptidealring. Dann ist jedes irreduzible Element ein Primelement.

5. *(6=1+2+3 Punkte)*

(a) Wann heißt ein Automorphismus $f : V \to V$ eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V mit Skalarprodukt ϕ *unitär*?

(b) Die Gruppe der Isometrien der Euklidischen Geraden $(\mathbb{R}, \phi_{st})$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Isom}(\mathbb{R}, \phi_{st}) &= \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes O(\mathbb{R}, \phi_{st}) = \mathrm{Transl}(\mathbb{R}) \rtimes \{\mathrm{id}, s_0\} \\ &= \{\text{Translationen}\} \cup \{\text{Spiegelungen}\} = \{T_a \,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{s_b \,|\, b \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Hier ist T_a die Translation um a, also $T_a(x) = x+a$, und s_b ist die Spiegelung am Punkt b. Ersetzen Sie in den folgenden Formeln die Fragezeichen durch die richtigen Formeln.

$$\begin{aligned} s_b(x) &= ?, \quad s_b \circ T_a = s_?, \\ T_a \circ s_b &= s_?, \quad s_b \circ T_a \circ s_b = T_?. \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie $\overset{!}{=}$ in

$$\begin{aligned} SU(2) &= \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär und } \det A = 1\} \\ &\overset{!}{=} \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a\overline{a} + b\overline{b} = 1\}. \end{aligned}$$

6. *(6=1+1+1+3 Punkte)*

(a) Wieviele Ähnlichkeitsklassen von Ornamentgruppen gibt es?

(b) Wieviele Ähnlichkeitsklassen von kristallographischen Raumgruppen mit $n = 3$ gibt es?

(c) Definieren Sie, was ein *Gitter im* $\mathbb{R}^n$ ist.

(d) Geben Sie die Namen der 5 Typen von Gittern im $\mathbb{R}^2$ an. Geben Sie auch jeweils für ein solches Gitter G die Anzahl $|\{f \in O(\mathbb{R}^2, \phi_{st}) \,|\, f(G) = G\}|$ an.

7. *(6 Punkte)* $P_T \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $P_I \subset M(3 \times 1, \mathbb{R})$ sind ein Tetraeder und ein Ikosaeder in $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit 0 als Mittelpunkt. $\mathrm{Sym}_{or}(P_T) \subset SO(3, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Sym}_{or}(P_I) \subset SO(3, \mathbb{R})$ sind die Gruppen der Drehungen des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, die den Tetraeder bzw. den Oktaeder invariant lassen. Jeweils sei

$$\begin{aligned} X &:= \text{Anzahl der Drehachsen eines Typs}, \\ Y &:= \text{Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs}. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle sagt einiges über $\mathrm{Sym}_{or}(P_T)$ aus.

Tetraeder P_T:

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
4	durch Ecken und gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$
3	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$3 \cdot 1 = 3$

Erstellen Sie eine analoge Tabelle für $\mathrm{Sym}_{or}(P_I)$.

8. *(6=2+2+2 Punkte)*

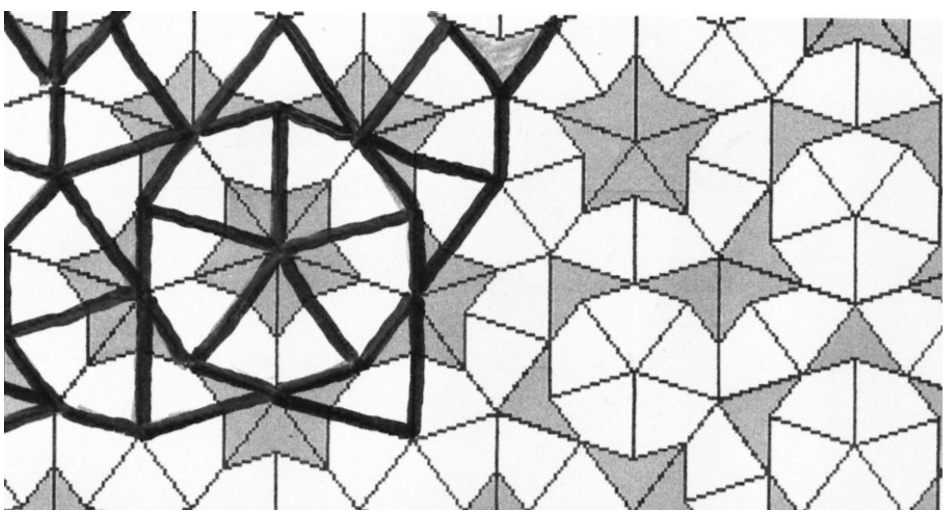
(a) Es gibt 2 Typen von *Penrose-Fliesen*, die *Drachen* und die *Schwalben*. Man erhält je eine Kopie durch Zerschneiden eines geeigneten Parallelogramms. Geben Sie in Form von 3 Skizzen die beiden Fliesen und das Parallelogramm an, inklusive der Färbung der Ecken als schwarze oder weiße Ecken bei den Fliesen und inklusive der Seitenlängen und Winkel und des zusätzlichen Punktes im Innern des Parallelogramms, den man zum Zerschneiden braucht.

(b) Eine *Penrose-Pflasterung* ist eine Überdeckung der Ebene $\mathbb{R}^2$ durch unendlich viele Penrose-Fliesen, wobei die Fliesen sich nur in ihrem Rand schneiden dürfen und nur Ecken gleicher Farbe (schwarz oder weiß) aneinanderstoßen dürfen.

Es gibt tatsächlich unendlich viele Penrose-Pflasterungen. Conway bemerkte, dass man durch folgende Prozedur, genannt *Vergröberung*, aus einer Penrose-Pflasterung eine neue Penrose-Pflasterung mit neuen Fliesen erhält, die um den Faktor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ größer als die alten Fliesen sind:

Jede Schwalbe wird durch eine Schnitt von einer zur anderen schwarzen Ecke in zwei Dreiecke geteilt. Die dabei entstandenen Kanten werden *neu* genannt. Alle Drachen und/oder Dreiecke, die eine nicht neue kurze Kante gemeinsam haben, werden entlang dieser Kante verklebt.

Das folgende Bild ist ein Ausschnitt einer Penrose-Pflasterung. Zeichnen Sie alle Kanten der Vergröberung ein. Da man sich leicht vertut, ist es sinnvoll, die Kanten mit Bleistift vorzuzeichnen und dann mit einem bessser sichtbaren Stift nachzuzeichnen.



(c) Beweisen Sie mit Hife der Prozedur *Vergröberung*, dass es zu einer Penrose-Pflasterung keine Translation $\neq \mathrm{id}$ gibt, die die Penrose-Pflasterung auf sich abbildet.