Lösungen der Klausur am 04.09.2015 zur Linearen Algebra II

1. *(6=3+1+2 Punkte)*

   (a) Eine Relation $R \subset M \times M$ ist eine *Äquivalenzrelation*, falls sie folgende drei Eigenschaften erfüllt:

   (i) *Reflexivität:* Für alle $x \in M$ gilt: $(x,x) \in R$.

   (ii) *Symmetrie:* Für alle $x, y \in M$ gilt: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$.

   (iii) *Transitivität:* Für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.

   (b) $\varphi(105) = \varphi(3 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$,
   $\varphi(72) = \varphi(2^3 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

   (c)

n	1	3	7	9	11	13	17	19
n^{-1}	1	7	3	9	11	17	13	19

2. *(6=3+3 Punkte)*

   (a) Es ist $x^3 - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_3$ und $\Phi_1 = x - 1$. Daher ist

$$\Phi_3 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1.$$

   Es ist $x^5 - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_5$. Daher ist

$$\Phi_5 = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

   Es ist $x^{15} - 1 = \Phi_1 \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_5 \cdot \Phi_{15} = (x^5 - 1) \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_{15}$. Daher ist

$$\Phi_{15} = \frac{x^{15} - 1}{(x^5 - 1) \cdot \Phi_3} = \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

   (b) Lösungen zu $b \equiv 4 \bmod 5$ sind $4, 9, 14, \ldots$. Ihre Reste modulo 11 sind $4, 9, 3, \ldots$. Also ist $b_0 := 14$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 4 \bmod 5 \\ b &\equiv 3 \bmod 11 \end{aligned}$$

   Es ist $b_0 \equiv 1 \bmod 13$ und $5 \cdot 11 = 55 \equiv 3 \bmod 13$. Also ist

$$\begin{aligned} b &= 14 + 2 \cdot 55 = 124 \\ \text{mit } b &\equiv 1 + 2 \cdot 3 = 7 \bmod 13 \end{aligned}$$

   eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} b &\equiv 4 \bmod 5 \\ b &\equiv 3 \bmod 11 \\ b &\equiv 7 \bmod 13 \end{aligned}$$

3. *(6=2+2+1+1 Punkte)*

(a) Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ ist in Jordannormalform, falls sie Blockdiagonalgestalt hat,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_l \end{pmatrix}$$

mit $A_j \in M(r_j \times r_j, K)$, und falls die Blöcke A_j Jordanblöcke sind,

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

für $\lambda_j \in K$.

(b)

$$A^{(f)} = \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K).$$

(c) Die Eigenwerte von $A^{(f)}$ sind die Zahlen $b_1, ..., b_m$. Zu jedem Eigenwert b_j hat eine zu $A^{(f)}$ konjugierte Matrix in Jordannormalform genau einen Jordanblock. Es ist ein Jordanblock der Größe $r_j \times r_j$.

Begründung: Weil f das charakteristische Polynom ist, sind die Zahlen b_j die Eigenwerte von $A^{(f)}$, und die Dimension des Hauptraums $\mathrm{Hau}(A^{(f)}, b_j)$ ist r_j. Es reicht zu zeigen, dass man nur je einen Jordanblock hat. Das folgt daraus, dass $A^{(f)} - b_j \cdot E_n$ den Rang $n-1$ hat und dass daher $\dim \mathrm{Eig}(A^{(f)}, b_j) = 1$ ist.

4. *(6=3+3 Punkte)*

(a) Sei a ein Erzeugendes des Hauptideals $(a_1, ..., a_n)$. Dann teilt a alle a_i wegen $a_i \in (a)$. Weil a Linearkombination der a_i ist, teilt jeder gemeinsame Teiler der a_i auch a. Daher ist a ein ggT von $a_1, ..., a_n$. □

(b) Sei $a \in R - (R^* \cup \{0\})$ irreduzibel, $a|(b \cdot c)$ und nicht $a|c$. Zu zeigen ist $a|b$. Weil a irreduzibel ist, sind seine einzigen Teiler die Einheiten und die zu a assoziierten Elemente. Wegen nicht $a|c$ ist

$$1 = \text{ (ein) } \mathrm{ggT}(a, c).$$

Nach Lemma 10.16 gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ mit

$$1 = \lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot c.$$

Daher ist $b = \lambda_1 \cdot a \cdot b + \lambda_2 \cdot b \cdot c$. Daraus und aus $a|(b \cdot c)$ folgt $a|b$. □

5. *(6=1+2+3 Punkte)*

(a) f ist genau dann *unitär*, wenn $\phi(f(a), f(b)) = \phi(a, b)$ für alle $a, b \in V$ gilt.

(b)

$$\begin{aligned} s_b(x) &= -x+2b, \quad s_b\circ T_a = s_{b-\frac{1}{2}a}, \\ T_a\circ s_b &= s_{b+\frac{1}{2}a}, \quad s_b\circ T_a\circ s_b = T_{-a}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} SU(2) &= \{A\in M(2\times 2,\mathbb{C})\mid A \text{ ist unitär und } \det A = 1\} \\ &= \{A\in GL(2,\mathbb{C})\mid \overline{A}^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{C}, ad-bc=1, \begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{C}, a\overline{a}+b\overline{b}=1\}. \end{aligned}$$

6. *(6=1+1+1+3 Punkte)*

(a) 17.

(b) 219.

(c) Ein *Gitter* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Untergruppe $G\subset\mathbb{R}^n$, die von einer Basis $(b_1,...,b_n)$ von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. (Dann ist $G =< b_1,...,b_n >= \sum_{j=1}^n \mathbb{Z}\cdot b_j$, und G ist als Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^n$. Dann ist $b_1,...,b_n$ eine *Gitterbasis*.)

(d) .

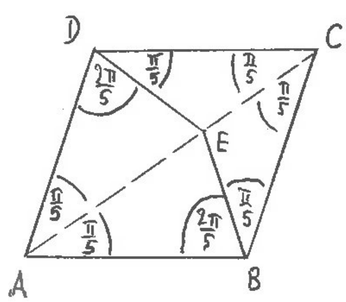
Name des Gitters	$\lvert\{f\in O(\mathbb{R}^2,\phi_{st})\mid f(G)=G\}\rvert$
schiefes Gitter	2
rechtwinkliges Gitter	4
quadratisches Gitter	8
rhombisches Gitter	4
hexagonales Gitter	12

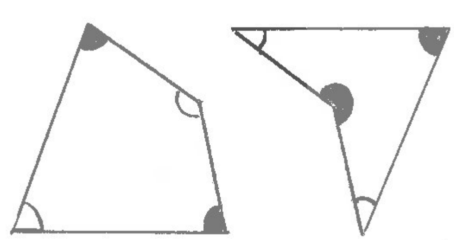
7. *(6 Punkte)*

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
$-$	$-$	0	(id :) 1
6	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$	$6\cdot 4 = 24$
15	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	$15\cdot 1 = 15$
10	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$10\cdot 2 = 20$

8. *(6=2+2+2 Punkte)*

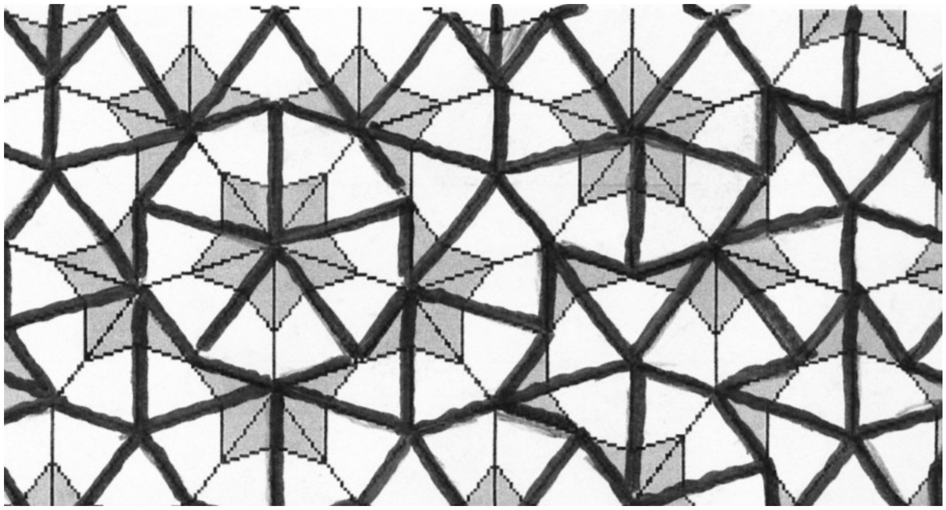
(a) $d(A,B)=d(B,C)=d(C,D)=d(D,A)=d(A,E)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $d(E,B)=d(E,D)=d(E,C)=1$.





Drachen Schwalbe

(b) .



(c) Wenn eine Penrose-Pflasterng unter einer nichttrivialen Translation invariant wäre, so wäre auch jede Penrose-Pflasterung, die man durch n-maliges Vergröbern ($n \in \mathbb{N}$) erhält, invariant unter der Translation. Aber für genügend großes n sind die Fliesen so groß, dass die Verschiebung einer einzelnen Fliese die Fliese überlappen würde. Dann kann die Penrose-Pflasterung nicht invariant unter der Translation sein. Ein Widerspruch.